Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

Calculer $\sqrt{9}$.

Résoudre $x^2 = 9$.

Trouver les racines carrées de 9.

Mise en contexte

Trouver les racines carrées de -1.

Mise en contexte

Trouver les racines troisièmes de $z = -8$.

Calcul des racines n-ièmes d'un nombre complexe

Trouver les racines troisièmes de $z = -8$.

Calcul des racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

Trouver les racines troisièmes de $z = -8$.

On cherche tous les nombres complexes w tels que $w^3 = z$.

Pour faciliter les calculs, il est préférable d'écrire z et w sous forme trigonométrique :

$$w = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \qquad z = 8(\cos(\pi) + i\sin(\pi)).$$

L'équation $w^3 = z$ devient,

$$\big(r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\big)^3 = 8(\cos(\pi) + i\sin(\pi)).$$

Théorème

Formule de De Moivre

$$\left(r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)\right)^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)\right)$$

Calcul des racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

$$\left(r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\right)^3 = 8(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

$$r^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = 8(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

Proposition

Égalité de nombres complexes

$$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = s(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r = s \quad \text{et} \quad \theta = \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Calcul des racines n-ièmes d'un nombre complexe

$$\left(r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\right)^3 = 8(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

$$r^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = 8(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

$$r^3 = 8 \qquad 3\theta = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$r = 2 \qquad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

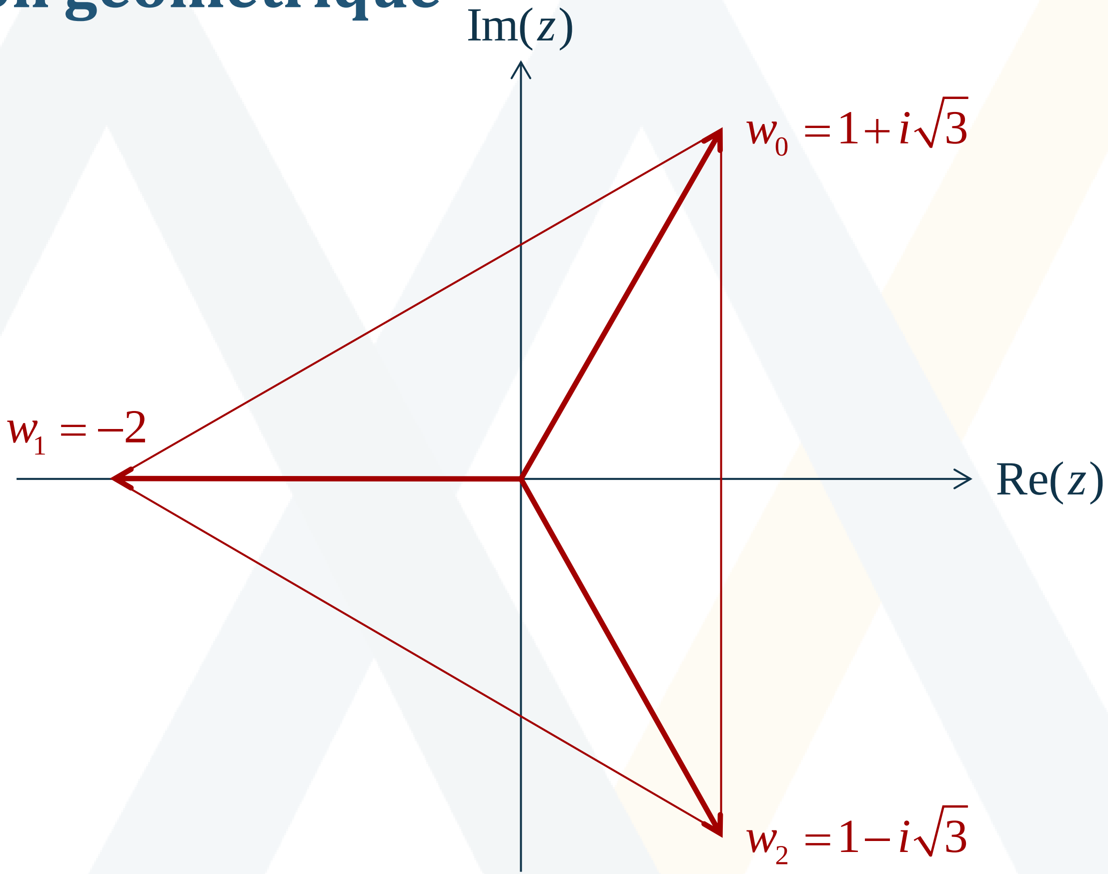
$$w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

Calcul des racines n-ièmes d'un nombre complexe

$$w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

k	θ	w
0	$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot 0}{3} = \frac{\pi}{3}$	$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3}$
1	$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot 1}{3} = \pi$	$2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -2$
2	$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot 2}{3} = \frac{5\pi}{3}$	$2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 1 - i\sqrt{3}$
3	$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot 3}{3} = \frac{7\pi}{3}$	$2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3}$

Interprétation géométrique



Remarques

- Tout nombre complexe possède n racines n-ièmes.

- Ces n racines n-ièmes, placées dans le plan d'Argand, forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Exemple

Trouver les racines quatrièmes de $z = 1 + i$.

1. Écrire w et z sous forme trigonométrique.

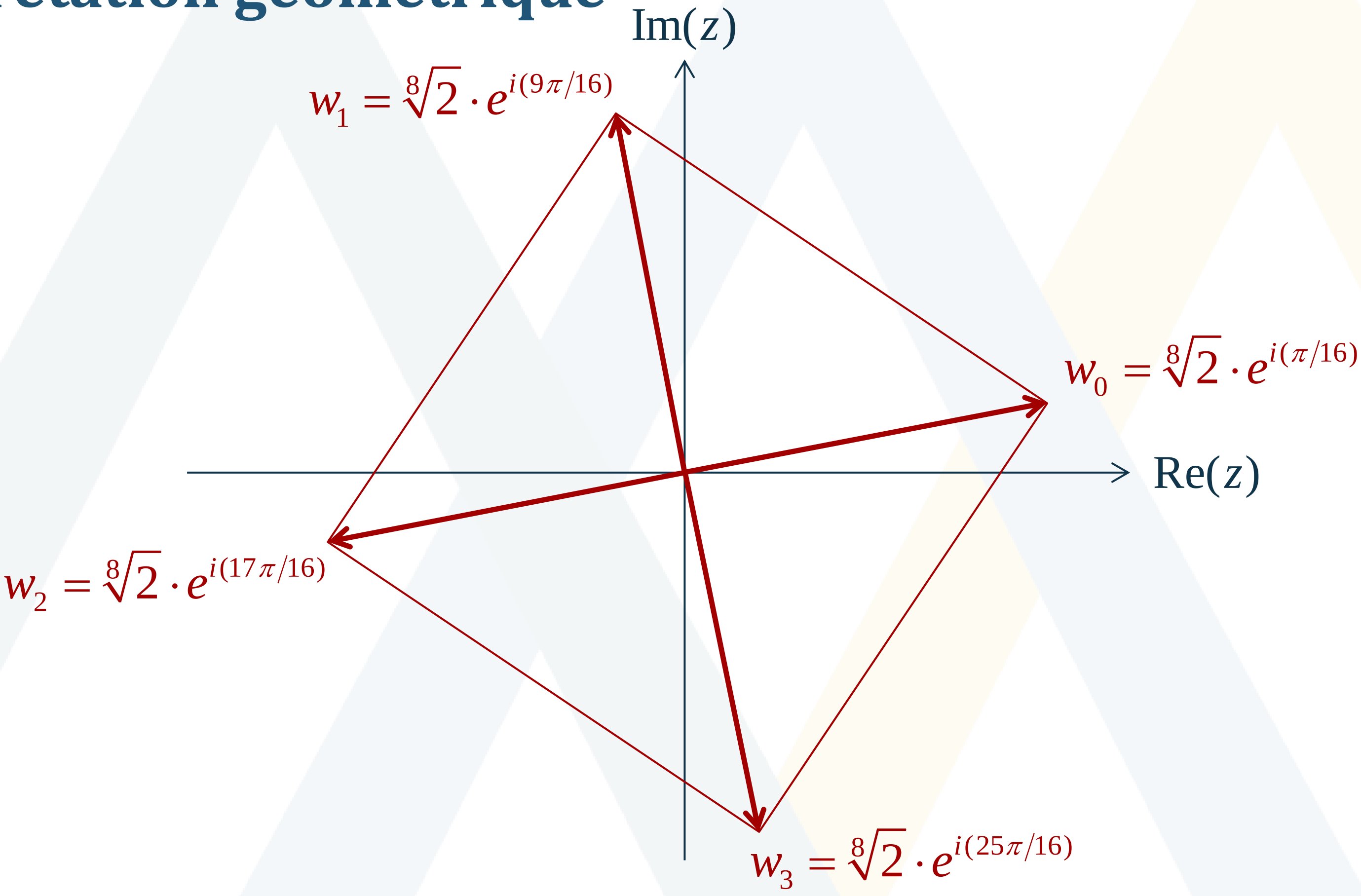
2. Remplacer dans l'équation $w^4 = z$, trouver r et θ.

3. Trouver les racines (sous forme cartésienne, si possible).

$$w = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{8\pi k}{16}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{8\pi k}{16}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

k	θ	w
0		
1		
2		
3		

Interprétation géométrique



Résumé

- Mise en situation
- Calcul des racines n-ièmes
- Interprétation géométrique

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL *de* LANAUDIÈRE *à* Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC