Représentation matricielle d'une transformation linéaire générale

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Représentation matricielle d'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

$$S:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad S(a,b,c,d) = (a+2d, 3c-b)$$

$$S\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \qquad \boldsymbol{A} \qquad \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

$$S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2 \qquad S(a,b,c,d)=(a+2d,3c-b)$$

$$S\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S(e_1) & S(e_2) & S(e_3) & S(e_4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

$$S:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad S(a,b,c,d)=(a+2d,3c-b)$$

$$S\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d’une transformation linéaire de V dans W.

$$T : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{P}_1 \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+2d)+(3c-b)x$$

$$T\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = (2+2\cdot 5)+(-3-0)x$$

$$= 12-3x$$

Représentation matricielle d'une transformation linéaire de V dans W.

$$T : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{P}_1 \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+2d)+(3c-b)x$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \qquad A \qquad \cdot \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d'une transformation linéaire de V dans W.

$$T : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{P}_1 \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+2d)+(3c-b)x$$

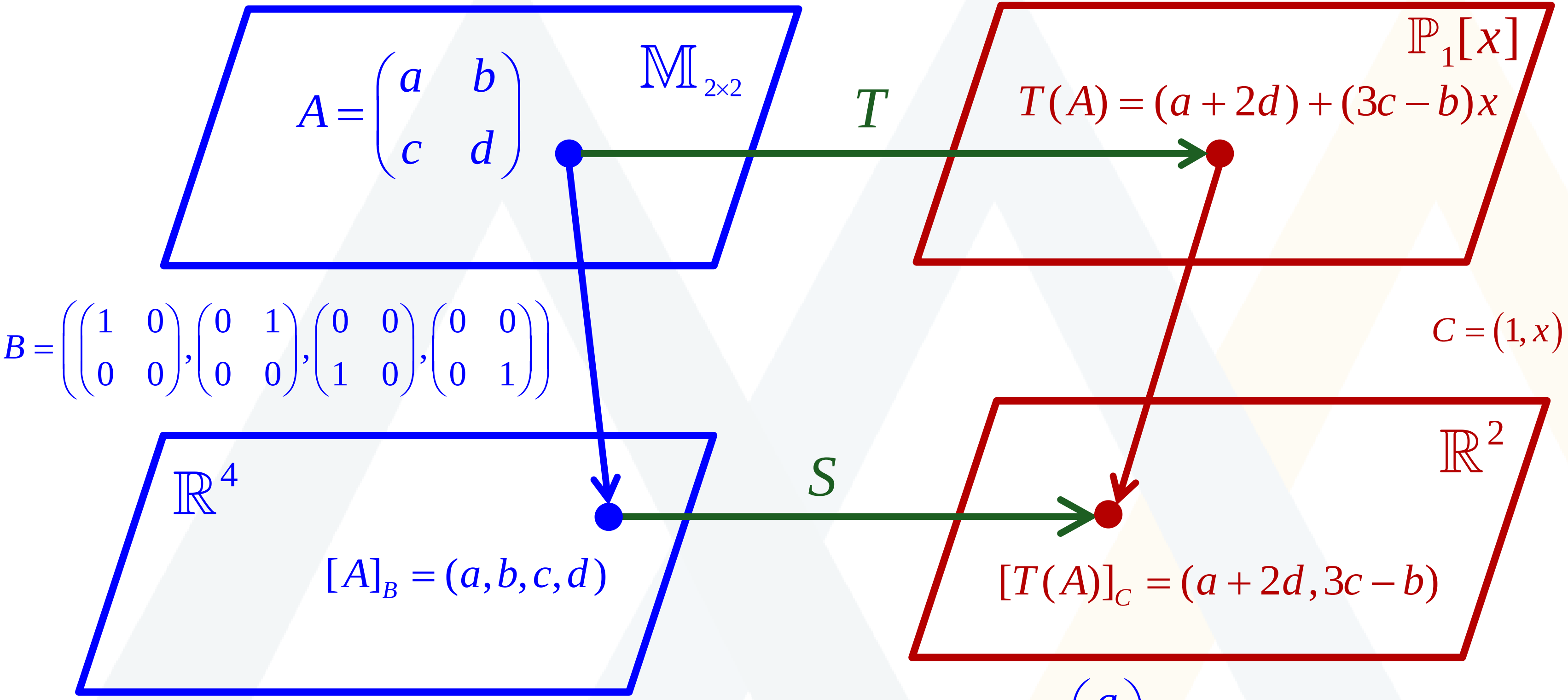
$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle d'une transformation linéaire de V dans W.

$$T:\mathbb{M}_{2\times 2}\to\mathbb{P}_1 \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a+2d)+(3c-b)x$$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

?



$$[T(A)]_C = (a+2d, 3c-b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = [T]_{C \leftarrow B} [A]_B$$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ base de } V \qquad T : V \to W \qquad C = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \text{ base de } W$$

$$[T(v)]_C = [T]_{C \leftarrow B} [v]_B$$

$$\Downarrow$$

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n \implies [T(v)]_C = [T(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n)]_C$$

$$= [x_1 T(b_1) + x_2 T(b_2) + \cdots + x_n T(b_n)]_C$$

$$= x_1 [T(b_1)]_C + x_2 [T(b_2)]_C + \cdots + x_n [T(b_n)]_C$$

$$\Downarrow$$

$$[v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & \cdots & [T(b_n)]_C \end{pmatrix}}_{[T]_{C \leftarrow B}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{[v]_B}$$

$$[T(v)]_C = [T]_{C\leftarrow B}[v]_B$$

$$[T]_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & \cdots & [T(b_n)]_C \end{pmatrix}$$

Exemple $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}$ $\quad T\left(p(x)\right) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p''(0) \end{pmatrix}$

$$T\left(1+5x-3x^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Exemple $T:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}$ $T\left(p(x)\right)=\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p''(0)\end{pmatrix}$

$$B=\left(1,x,x^2\right) \qquad C=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$[T(1)]_C=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad [T(x)]_C=\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \left[T(x^2)\right]_C=\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$[T]_{C\leftarrow B}=\begin{pmatrix}[T(1)]_C & [T(x)]_C & \left[T(x^2)\right]_C\end{pmatrix}$$

Exemple $T:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}$ $\quad T\left(p(x)\right)=\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p''(0) \end{pmatrix}$

$$B=\left(1,x,x^2\right) \qquad C=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$[T(1)]_C=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad [T(x)]_C=\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad [T(x^2)]_C=\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$[T]_{C\leftarrow B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Exemple

$$T:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2} \qquad T\left(p(x)\right)=\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p''(0) \end{pmatrix}$$

$$T\left(1+5x-3x^2\right)=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\left(1+5x-3x^2\right)\right]_C = [T]_{C\leftarrow B}\left[1+5x-3x^2\right]_B$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Résumé

Étapes pour trouver la représentation matricielle d'une transformation linéaire T de V dans W.

1. Déterminer une base B de V et une base C de W.
2. Appliquer la transformation T sur chaque élément de la base B.
3. Trouver les coordonnées des éléments de l'étape 2 dans la base C.
4. Construire la matrice

$$[T]_{C\leftarrow B} = \left([T(b_1)]_C \quad [T(b_2)]_C \quad \cdots \quad [T(b_n)]_C \right)$$

Conception du contenu

Christian Côté
Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC