

# Formule de De Moivre

## Christian Côté

Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal

[christian.cote@collanaud.qc.ca](mailto:christian.cote@collanaud.qc.ca)



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)

du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

# Mise en contexte

Calculer  $2^{16}$ .

## Mise en contexte

Calculer  $(1+i)^{16}$ .

## Mise en contexte

Calculer  $(\sqrt{3} + i)^{77}$ .

# Théorème

## Formule de De Moivre

Si  $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ , alors

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

## Exemple 1

Calculer  $(1+i)^{16}$ .

## Exemple 2

Calculer  $(\sqrt{3} + i)^{77}$ .

## Preuve de la formule de De Moivre pour le cas $n \in \mathbb{N}$

$$z^1 = z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = r^1 (\cos(1 \cdot \theta) + i \sin(1 \cdot \theta))$$



# Preuve de la formule de De Moivre pour le cas $n \in \mathbb{N}$

$$z^{n+1} = z^n z$$

$$= r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \cdot r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta) \cos(\theta) + i \cos(n\theta) \sin(\theta) + i \sin(n\theta) \cos(\theta) + i^2 \sin(n\theta) \sin(\theta))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) + i(\cos(n\theta) \sin(\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)))$$

# Preuve de la formule de De Moivre pour le cas $n \in \mathbb{N}$

$$z^{n+1} = z^n z$$

$$= r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) (r (\cos(\theta) + i \sin(\theta)))$$


$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta)\cos(\theta) + i \cos(n\theta)\sin(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + i \sin(n\theta)\cos(\theta))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + i(\cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta)))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta))$$

# Preuve de la formule de De Moivre pour le cas $n \in \mathbb{N}$

$$z^{n+1} = z^n z$$

$$= r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) (r (\cos(\theta) + i \sin(\theta)))$$

$$\cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b) = \sin(a + b)$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) + i (\cos(n\theta) \sin(\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) + i (\cos(n\theta) \sin(\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta))$$

# Preuve de la formule de De Moivre pour le cas $n \in \mathbb{N}$

$$z^{n+1} = z^n z$$

$$= r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \cdot r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta) \cos(\theta) + i \cos(n\theta) \sin(\theta) + i \sin(n\theta) \cos(\theta) + i^2 \sin(n\theta) \sin(\theta))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) + i(\cos(n\theta) \sin(\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)))$$

$$= r^{n+1} (\cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta)) = r^{n+1} (\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta))$$

## Preuve de la formule de De Moivre pour le cas $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))} \left( \frac{\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)}{\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)} \right)$$

$$= \frac{r^{-n} (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))}{(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))}$$

$$= \frac{r^{-n} (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))}{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)}$$

$$= r^{-n} (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)) = r^{-n} (\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta))$$

# Résumé

- Formule de De Moivre
- Preuve de la formule de De Moivre

Conception du contenu

**Christian Côté**

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

[christian.cote@collanaud.qc.ca](mailto:christian.cote@collanaud.qc.ca)

Révision du contenu

**Samuel Bernard**

[samuel.bernard@collanaud.qc.ca](mailto:samuel.bernard@collanaud.qc.ca)

Direction de projet

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**

Postproduction

**Symon Nestoruk**

Musique

**Sébastien Belleudy**

[sebe.bandcamp.com](http://sebe.bandcamp.com)

Conception graphique

**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX

**Nicolas Beauchemin**

[nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca](mailto:nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca)



Production

**Samuel Bernard**



**Bruno Poellhuber**



**Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence**

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

**Mathema-TIC.ca**