Mathéma-TIC

Matrice diagonalisable

Algorithme de diagonalisation

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Théorème

Matrice diagonalisable

Soit A une matrice $n \times n$. A est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

Plus précisément, on a $\mathrm{A}=PD\ P^{-1}$, où D est une matrice diagonale, si et seulement si les colonnes de P sont n vecteurs propres linéairement indépendants de A.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A associées respectivement aux colonnes de P.

Procédure

Algorithme de diagonalisation

Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable (A=$PD\ P^{-1}$). Pour diagonaliser la matrice A, on procède comme suit :

1. déterminer le polynôme caractéristique de $A, P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$;
2. trouver les racines de $P_A(\lambda)$ (valeurs propres de A) ;
3. déterminer des bases des espaces propres E_λ;
4. construire la matrice inversible P à partir des vecteurs de base de tous les espaces propres;
5. construire la matrice diagonale D à partir des valeurs propres de A.

Exemple 1

Diagonaliser, si possible, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$
2. Valeurs propres : $P_A(\lambda) = 0$
3. Bases des espaces propres

Pour $\lambda = 1$, on a $(A - I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Exemple 1

Diagonaliser, si possible, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 2$, on a $(A - 2I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Exemple 1

4. Construction de la matrice P

$$P = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Construction de la matrice D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérification

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PD.$$

Exemple 2

Diagonaliser, si possible, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2$
2. Valeurs propres : $P_A(\lambda) = 0$
3. Bases des espaces propres

$(A - 2I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Résumé

- Théorème de diagonalisation
- Algorithme de diagonalisation
- Exemple 1
- Exemple 2

Conception du contenu

Karima Amoura

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC