Matrice diagonalisable

Définition

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour un entier $k \geq 2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}.$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, k \geq 2.$$

Exemple 2

Soit A une matrice 2×2 . Trouver A^k en admettant que $A = PDP^{-1}$, où P est une matrice inversible et D est une matrice diagonale.

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1}$$

Exemple 2

$$A^3 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^2P^{-1}$$

De la même manière

$$A^k = (PDP^{-1})\left(PD^{k-1}P^{-1}\right) =$$

Définition

Matrice diagonalisable

Soit A une matrice $n \times n$. A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, A est diagonalisable s'il existe une matrice P inversible, telle que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale.

Exemple 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vérifiez que A est diagonalisable (A=$PD\,P^{-1}\Leftrightarrow$ AP=PD).

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Résumé

- Exemple 1
- Exemple 2
- Définition de matrice diagonalisable
- Exemple 3

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Karima Amoura

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC