Mathéma-TIC

Vecteurs propres

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d’intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (4,1,-3)$ et $\boldsymbol{v} = \ (3,1,-2)$.

Évaluer les produits $A\boldsymbol{v}$ et $A\boldsymbol{u}$. Qu'observe-t-on?

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Définition

Vecteur propre

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Un vecteur $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur propre de A s'il existe un scalaire λ tel que $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. Le scalaire λ est appelé valeur propre de la matrice A.

Exemple 2

Trouver les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

Pour $\lambda = 1$, on a $(A - I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 2$, on a $(A - 2I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

De (2), on a que $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 3x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $x_3 = 2 \Rightarrow V_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Exemple 3

Déterminer les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -7 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \\ &= -(\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 2$, on a $(A - 2I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Résumé

- Exemple 1
- Définition d’un vecteur propre
- Exemple 2
- Exemple 3

Conception du contenu

Karima Amoura

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Mathéma-TIC

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC