Mathéma-TIC

Valeurs propres et multiplicité algébrique

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (4,1,-3)$ et $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$.

Évaluer les produits $A\boldsymbol{v}$ et $A\boldsymbol{u}$. Qu'observe-t-on?

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Définition

Valeur propre

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Le scalaire λ est une valeur propre de A si l'équation $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ admet au moins une solution $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$.

Exemple 2

Vérifier si $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ sont des valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 1$, on a

$$Au = u \Leftrightarrow (A - I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 2$, on a

$$Au = 2u \Leftrightarrow (A - 2I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Définition

Polynôme caractéristique

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme en λ de degré n, défini par $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, où I est la matrice identité d'ordre n.

Exemple 3

Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)^2.$$

Proposition

Détermination des valeurs propres

Soit A une matrice $n \times n$. Un nombre scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.

Exemple 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Définition

Multiplicité algébrique

La multiplicité algébrique de la valeur propre r de A, une matrice $n \times n$, est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de A. C'est le nombre entier s ($s \geq 1$) tel que :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - r)^s p(\lambda), \text{ avec } p(r) \neq 0 .$$

Exemple 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les multiplicités algébriques des valeurs propres de A.

$$P_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3)$$

$$= -(\lambda - 0)^2(\lambda - 3)^1$$

Résumé

- Exemple 1
- Définition d’une valeur propre
- Exemple 2
- Définition du polynôme caractéristique
- Exemple 3
- Proposition
- Exemple 4
- Définition de la multiplicité algébrique
- Exemple 5

Conception du contenu
Karima Amoura
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu
Samuel Bernard et Véronique Hussin
samuel.bernard@collanaud.qc.ca
hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC