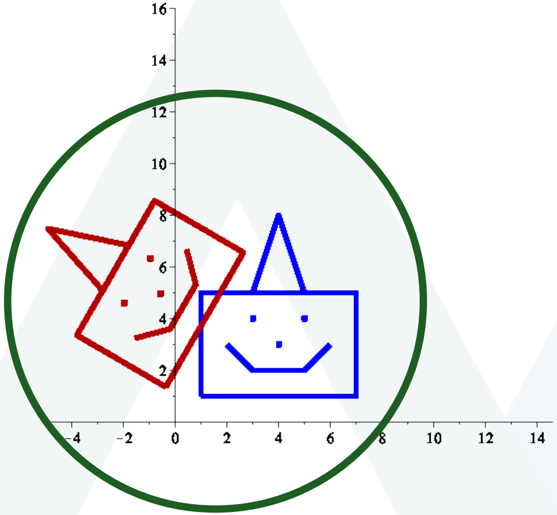
Matrice orthogonale

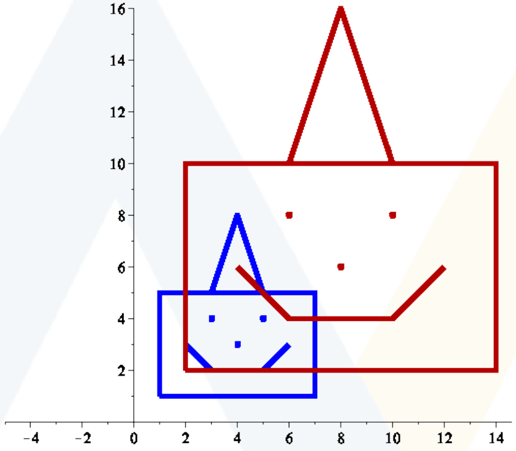
Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

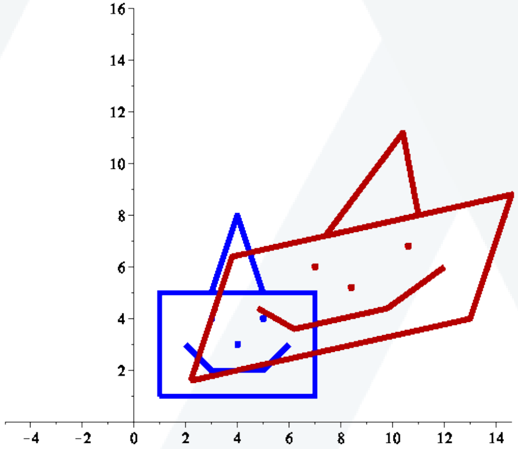
Rotation



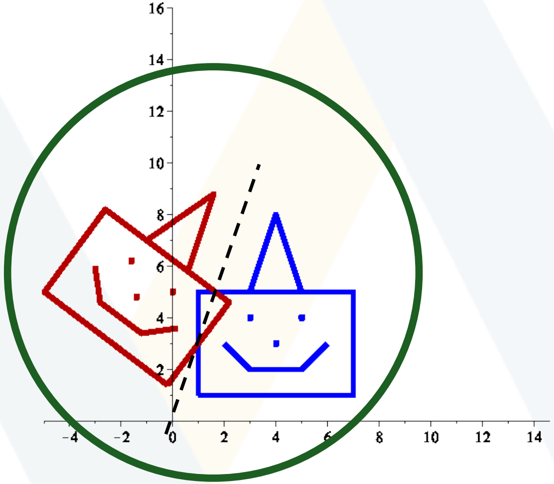
Homothétie



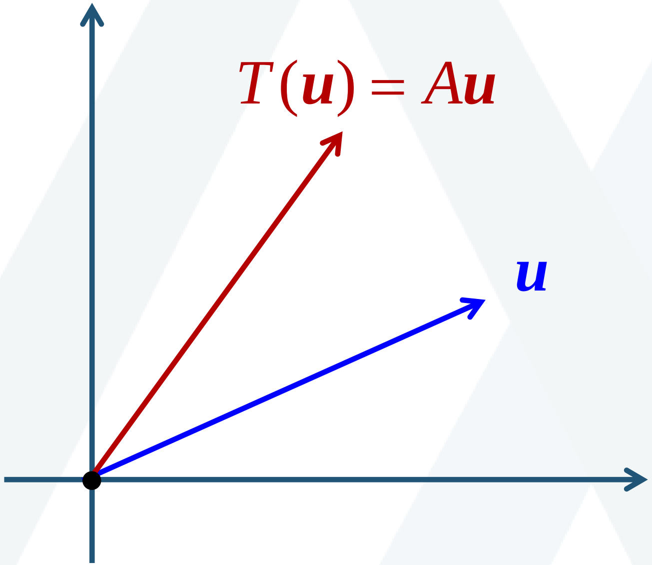
Étirement



Réflexion



Transformations qui préservent les longueurs



$$\|u\|^2 = \|Au\|^2$$

$$u^T u = (Au)^T (Au)$$

$$u^T u = (u^T A^T)(Au)$$

$$u^T I u = u^T (A^T A) u$$

$$\Rightarrow I = A^T A$$

Définition

Matrice orthogonale

On dit qu'une matrice A est orthogonale si $A^T A = I$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{A^T}\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

Déterminant d'une matrice orthogonale

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou -1.

Preuve

$$A^T A = I$$

$$\left|A^T A\right| = \left|I\right|$$

$$\left|A^T\right|\left|A\right| = 1$$

$$\left|A\right|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|A\right| = \pm 1$$

Les matrices de rotation sont orthogonales

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 1$$

Les matrices de réflexion sont orthogonales

Prenons $\boldsymbol{u} = (a, b)$ un vecteur unitaire comme vecteur directeur de l'axe de réflexion.

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -a^2 + b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -a^2 + b^2 \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2\right)\left(-a^2 + b^2\right) - (2ab)^2 = -(a^2 + b^2)^2 = -1$$

Théorème

Caractérisation d'une matrice orthogonale

Une matrice est orthogonale si et seulement si les colonnes (ou lignes) de la matrice (vues comme des vecteurs) sont unitaires et deux à deux orthogonales.

Preuve

$$A^T A = \begin{pmatrix} — & a_1^T & — \\ — & a_2^T & — \\ — & a_3^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & a_1^T a_3 \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & a_2^T a_3 \\ a_3^T a_1 & a_3^T a_2 & a_3^T a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_i^T a_j = 0 \text{ et } a_i^T a_i = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

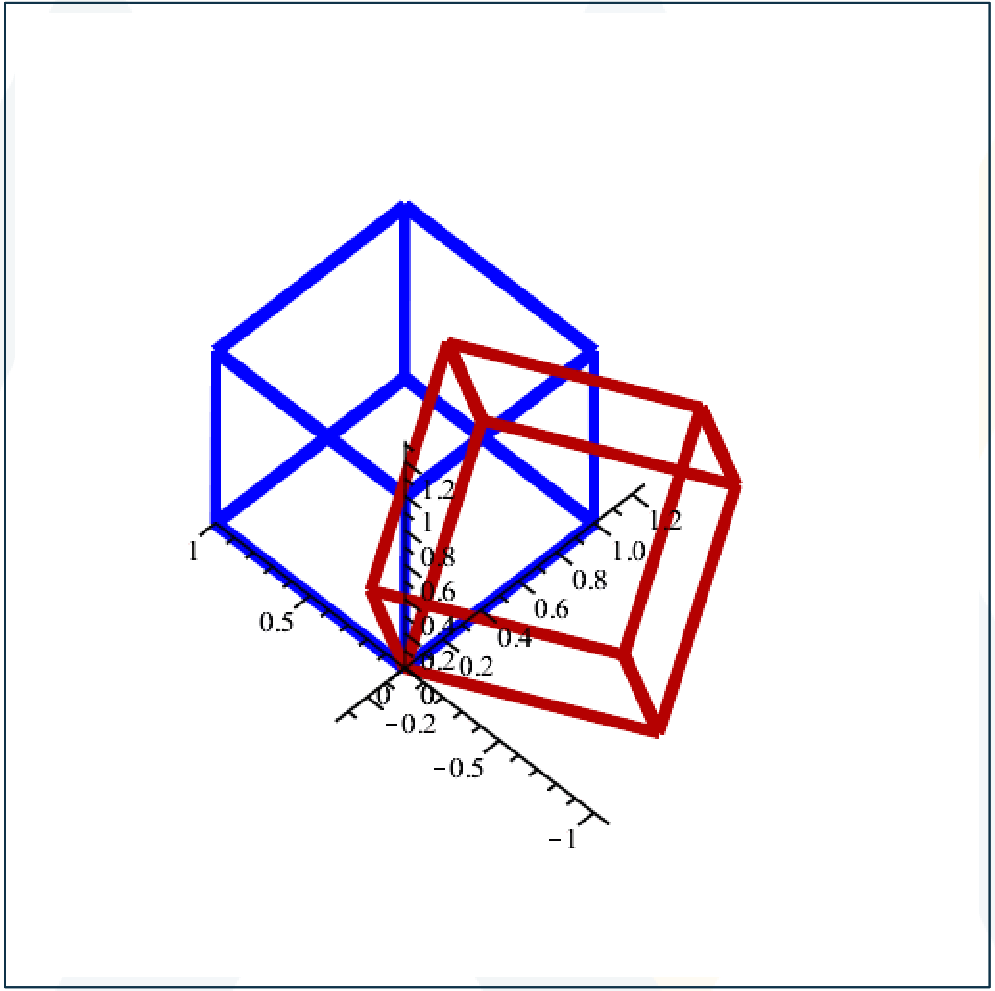
Les colonnes de A sont unitaires et deux à deux orthogonales.

Exemple

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1) \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0) \qquad \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple



Résumé

- Transformations qui préservent les longueurs
- Définition de matrice orthogonale
- Déterminant d'une matrice orthogonale
- Matrices de rotation
- Matrices de réflexion
- Théorème de caractérisation
- Construction de matrices orthogonales

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Mathéma-TIC

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC

CC BY NC SA

Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca