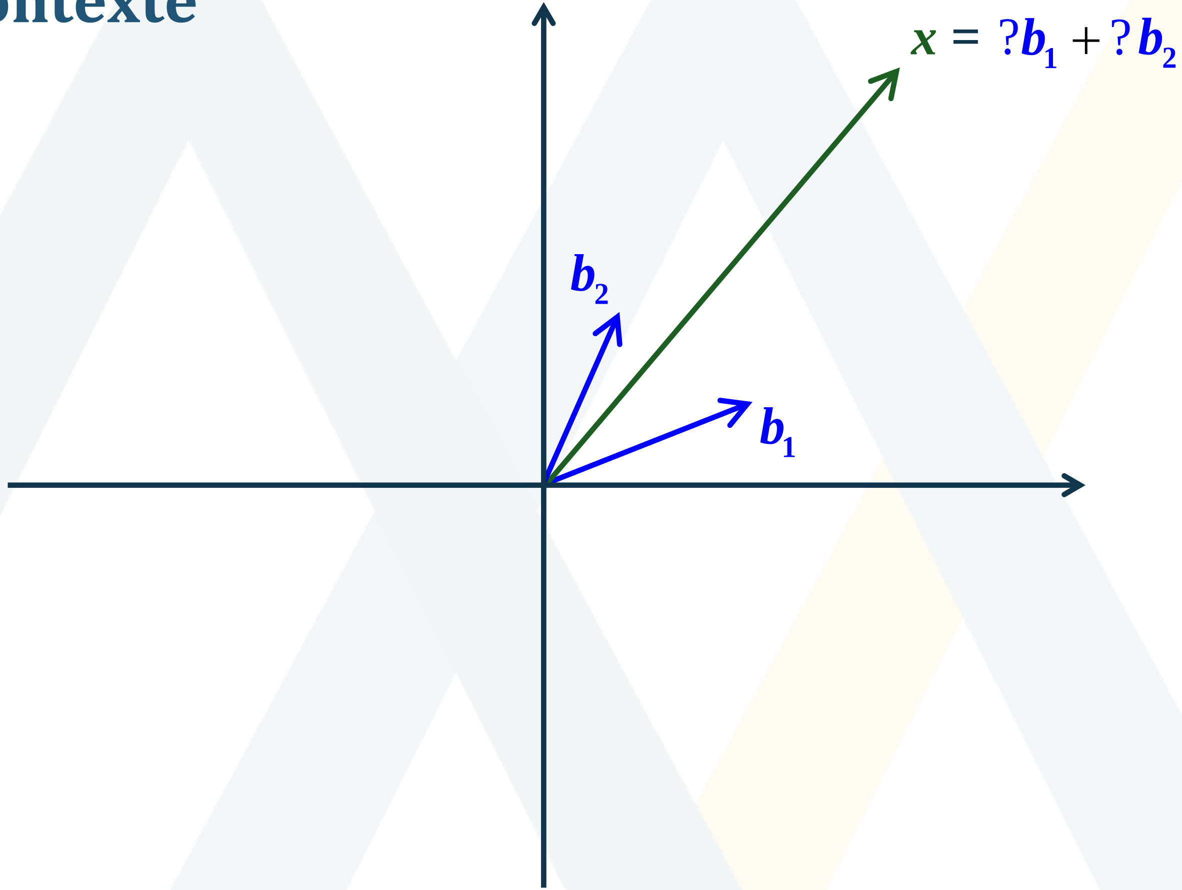
Famille orthogonale de vecteurs

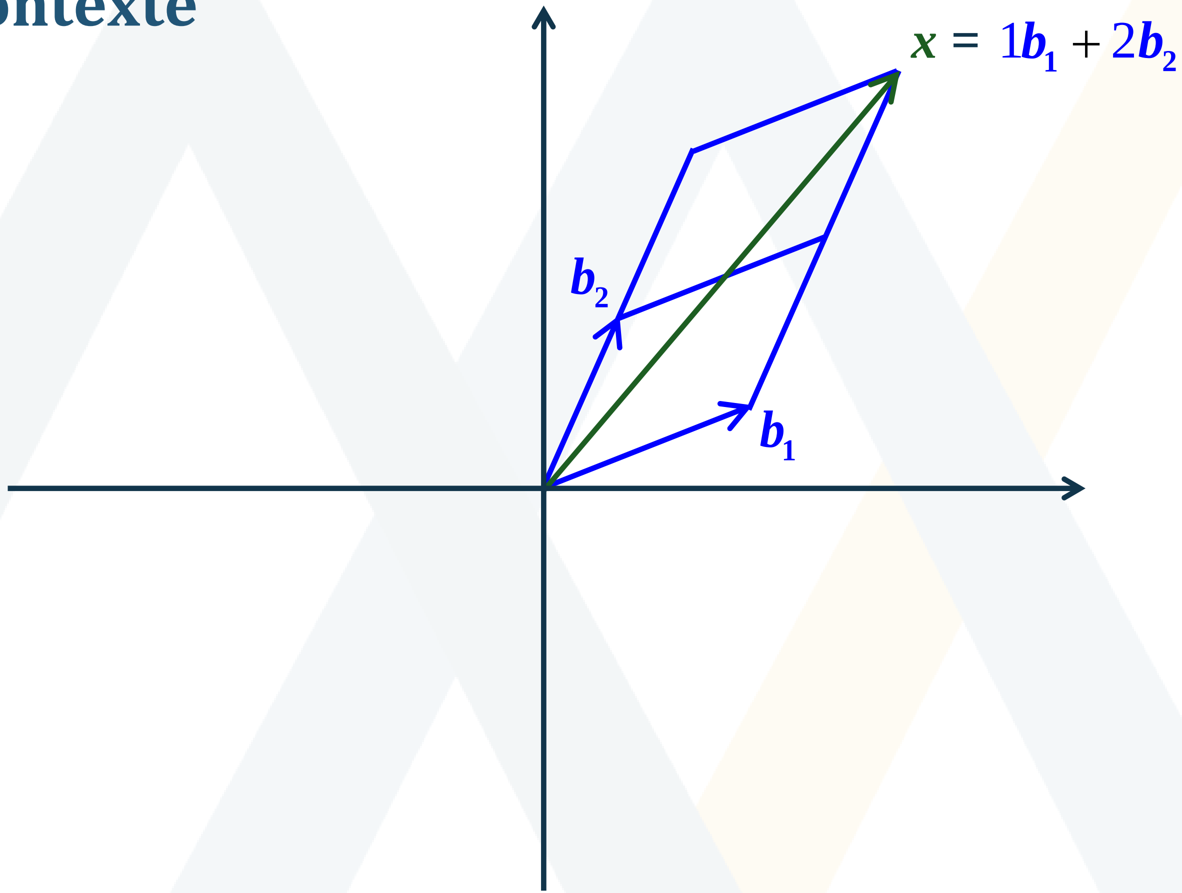
Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l’Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d’intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

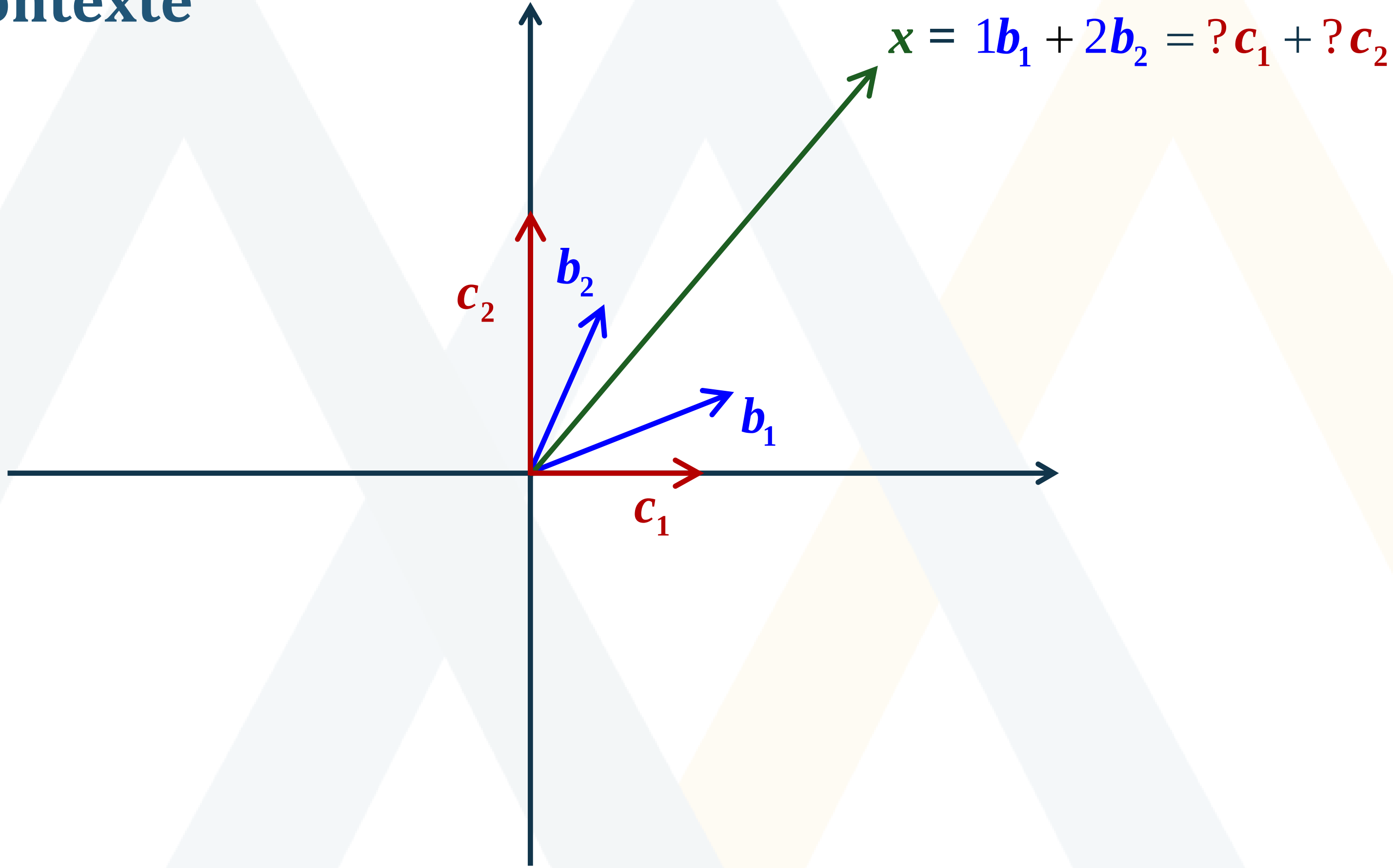
Mise en contexte



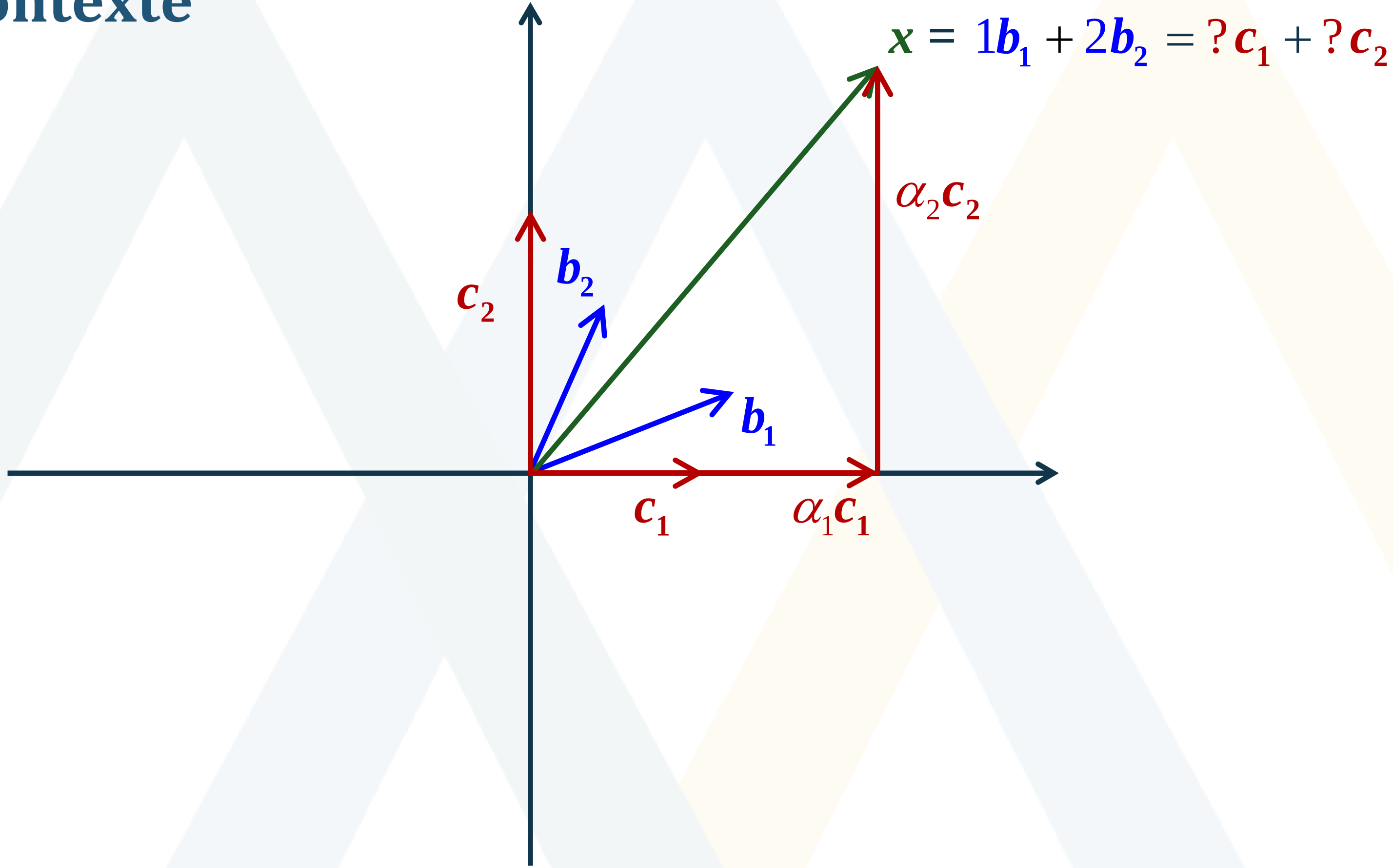
Mise en contexte



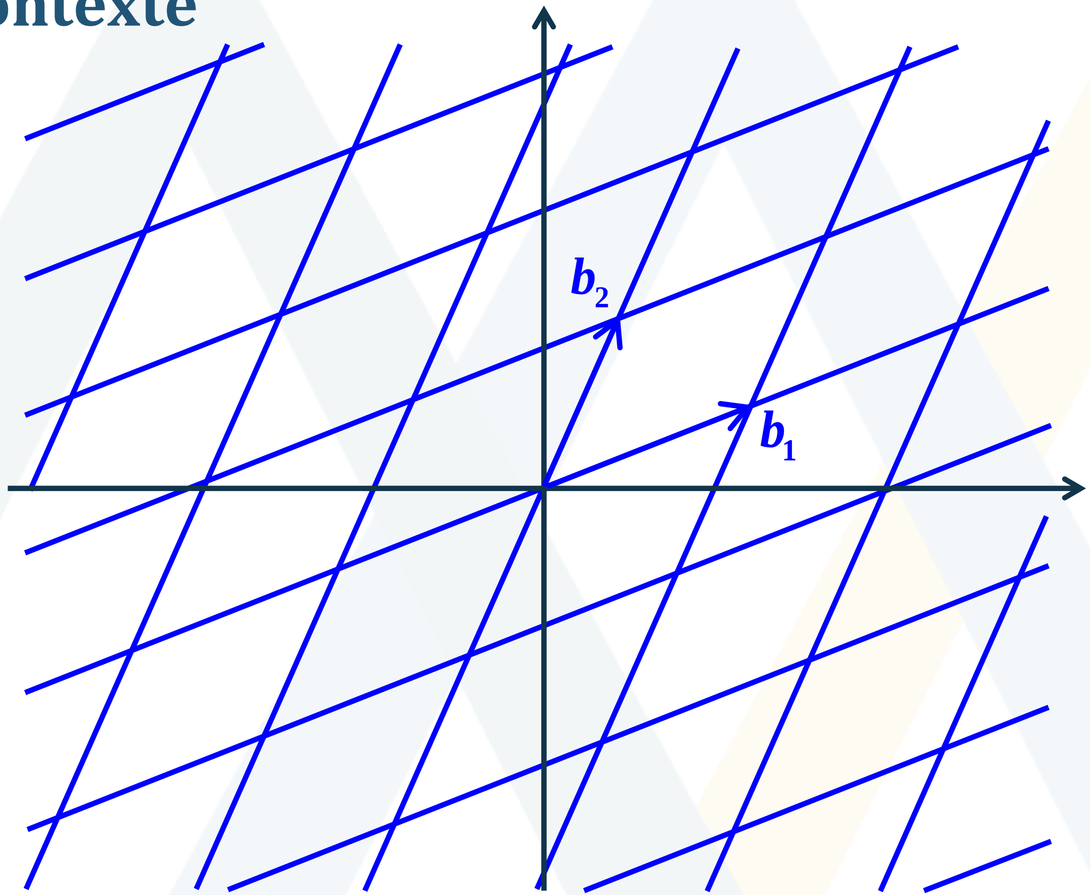
Mise en contexte



Mise en contexte

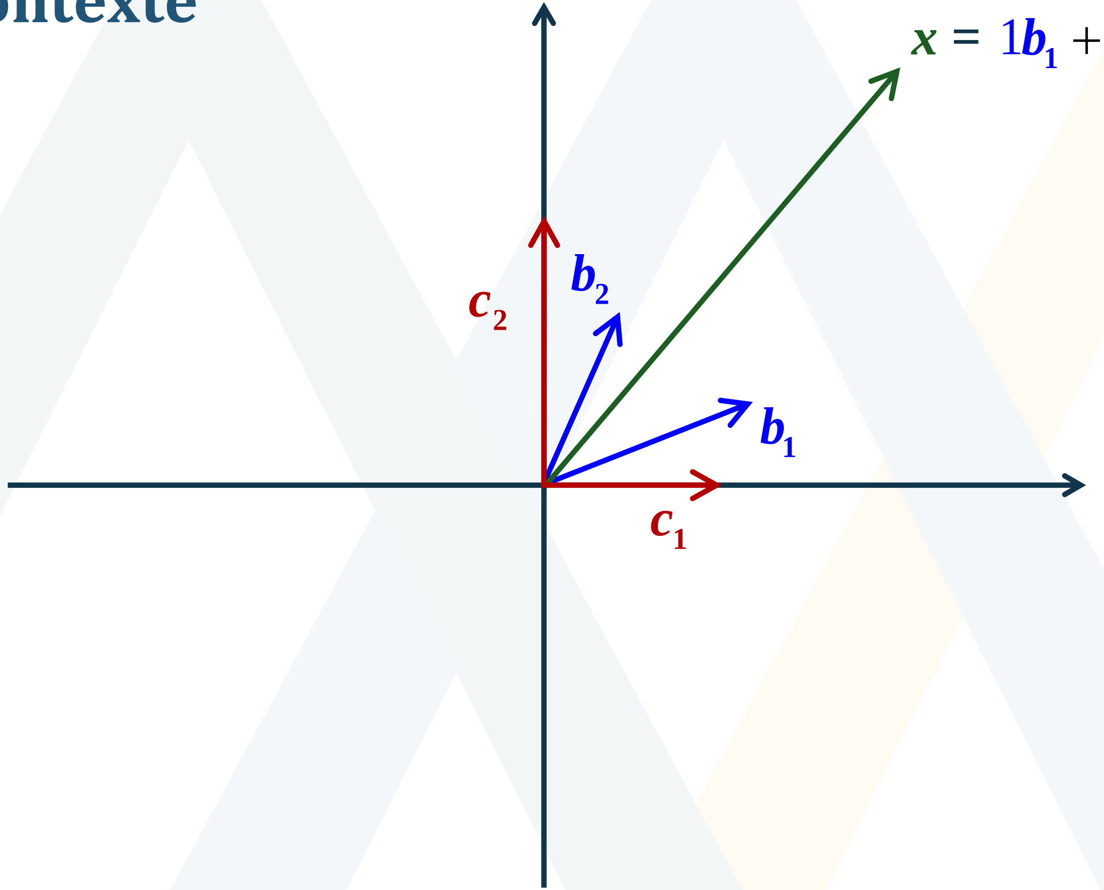


Mise en contexte

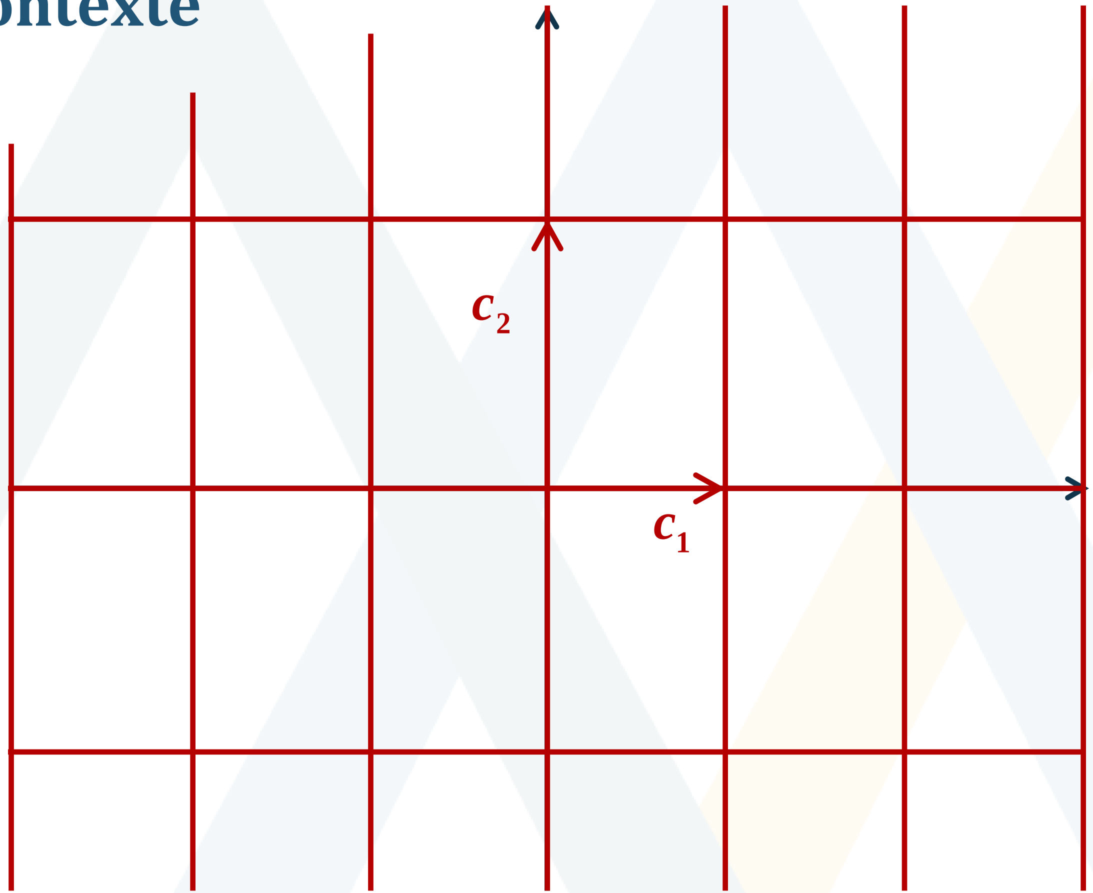


Mise en contexte

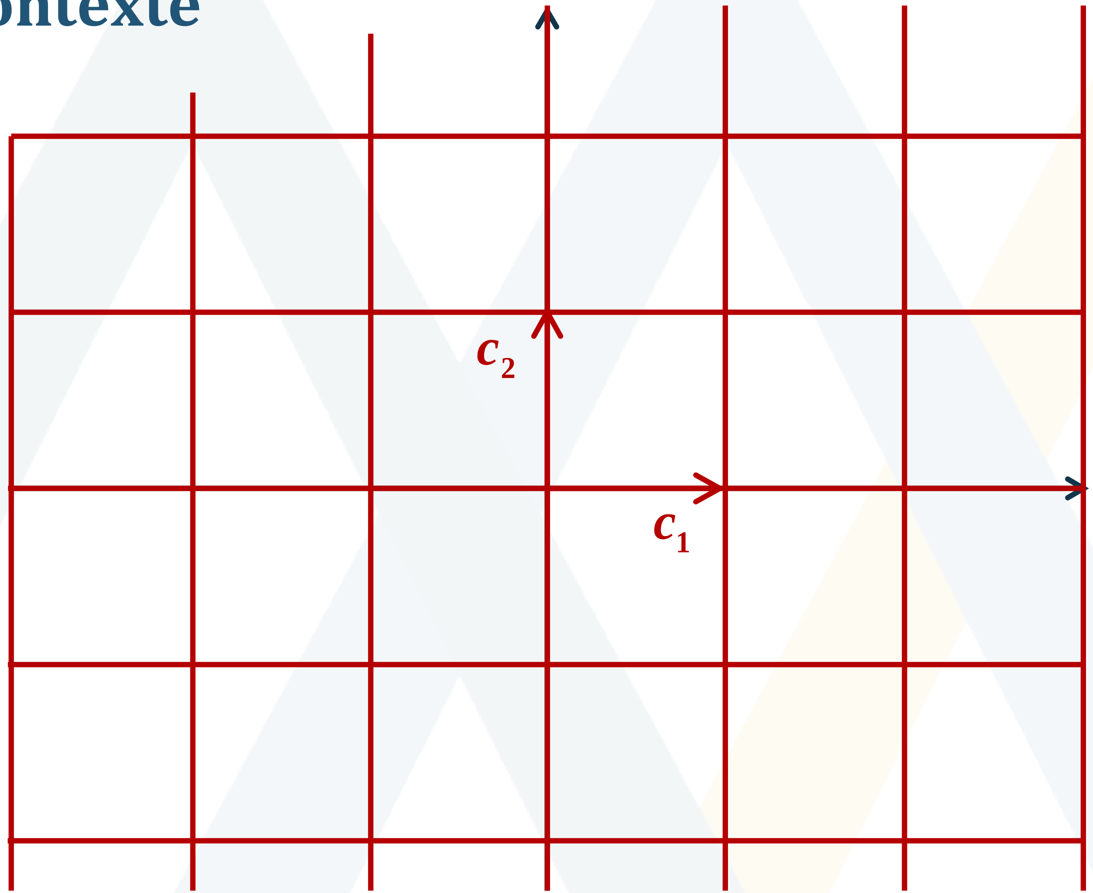
$$\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 = ?\,\boldsymbol{c}_1 + ?\,\boldsymbol{c}_2$$



Mise en contexte



Mise en contexte



Définition

Famille orthogonale

On dit qu'une famille de vecteurs $B = \left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p\right)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale si pour tout $i \neq j$, $\boldsymbol{u}_i$ est orthogonal à $\boldsymbol{u}_j$ ($\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$).

De plus, si chaque vecteur est unitaire ($||\boldsymbol{u}_i|| = 1$), alors on parle d'une famille orthonormale.

Exemple 1

Montrer que la famille $B = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3})$, où

$$\boldsymbol{u_1} = (1,0,-2),\ \ \boldsymbol{u_2} = (2,1,1),\ \ \boldsymbol{u_3} = (2,-5,1),$$

est orthogonale.

Théorème

Base orthogonale

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est une base de l'espace qu'elle engendre.

$$c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + c_p\boldsymbol{u_p} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$$

$$\boldsymbol{u_1} \cdot \left(c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + c_p\boldsymbol{u_p}\right) = \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{0}$$

$$c_1\left(\boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_1}\right) + c_2\left(\boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_2}\right) + \cdots + c_p\left(\boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_p}\right) = 0$$

$$c_1\left(\boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_1}\right) + c_2\left(\quad 0 \quad\right) + \cdots + c_p\left(\quad 0 \quad\right) = 0$$

$$c_1\left(\boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_1}\right) = 0$$

$$c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$$

Exemple 1 - revisité

Montrer que la famille $B = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3})$, où

$$\boldsymbol{u_1} = (1,0,-2),\ \ \boldsymbol{u_2} = (2,1,1),\ \ \boldsymbol{u_3} = (2,-5,1),$$

est orthogonale.

Théorème

Coordonnées dans une base orthogonale

Soit $B = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ une base orthogonale d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $\boldsymbol{y} \in W$,

$$\boldsymbol{y} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{y} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{y} + \cdots + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_p}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_i}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}_i}{\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_i}\right)\boldsymbol{u}_i.$$

Illustration du théorème

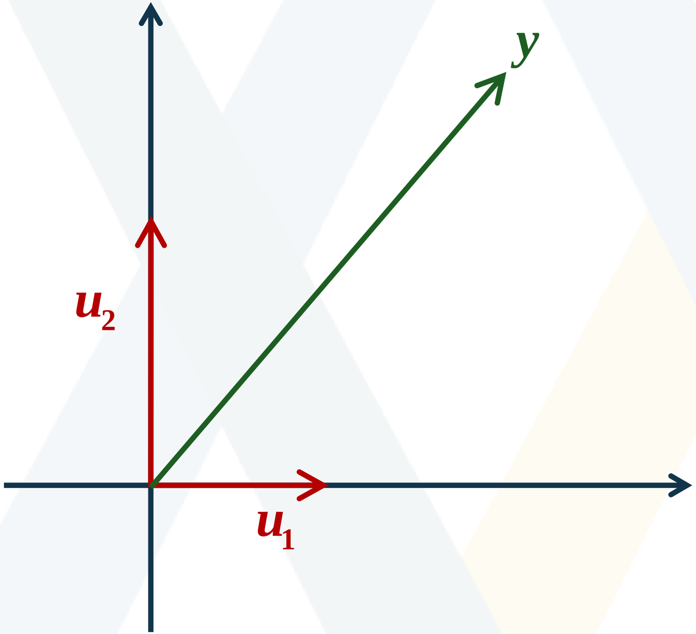


Illustration du théorème

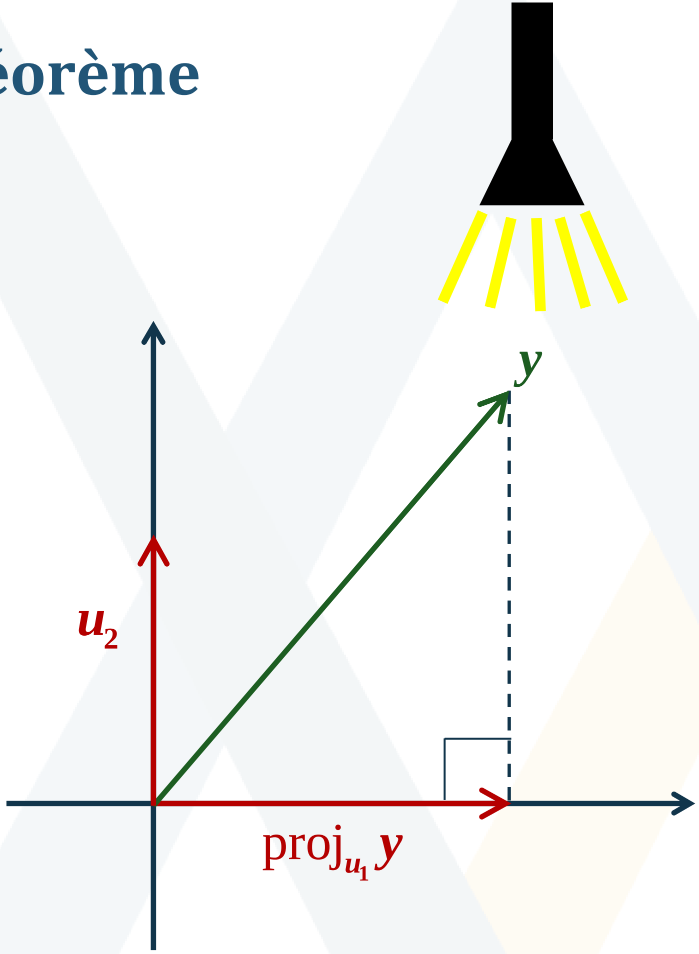


Illustration du théorème

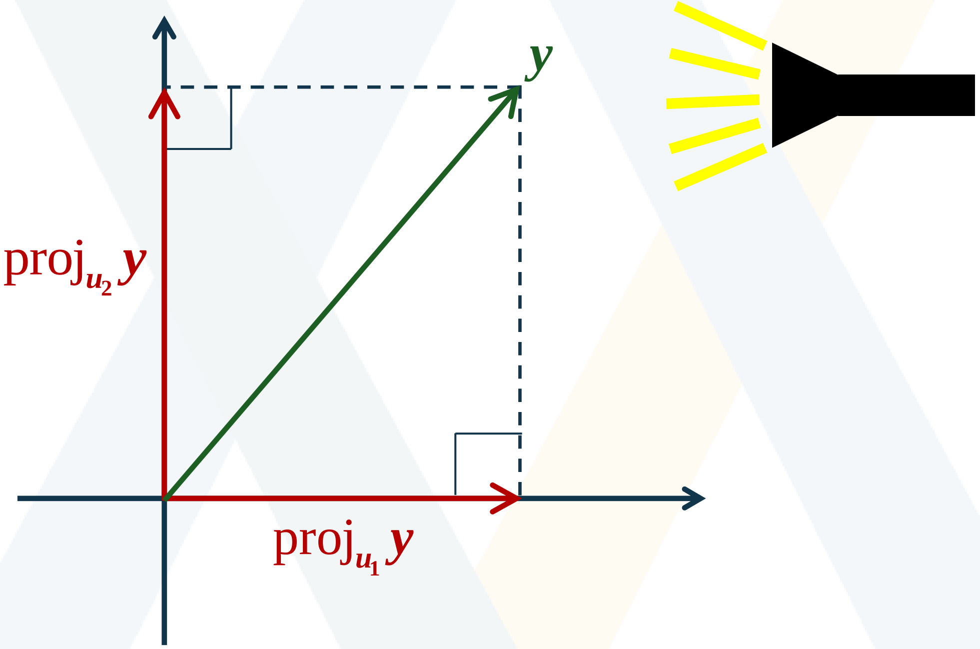
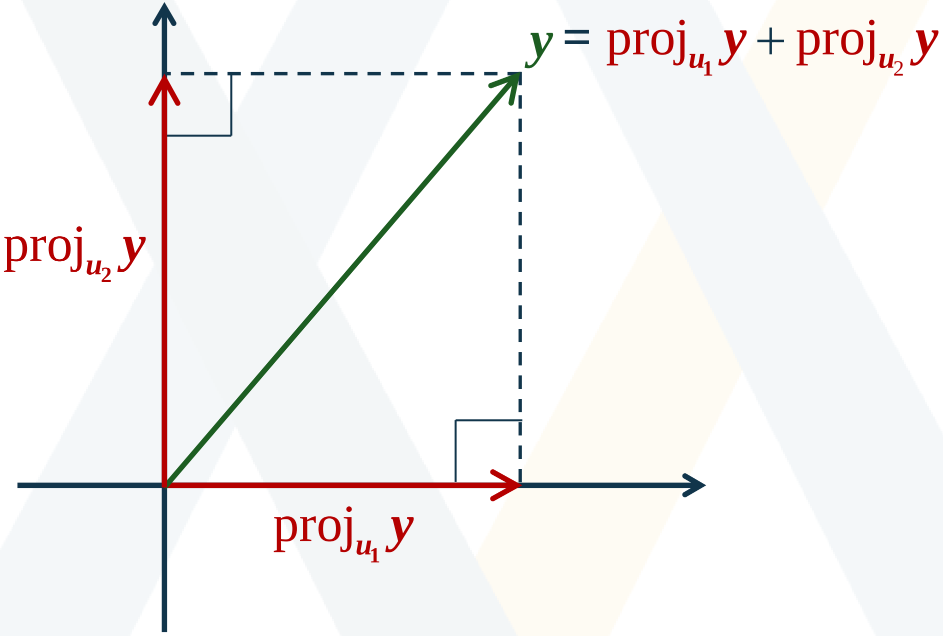


Illustration du théorème



Preuve

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{u}_1 \cdot (c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p)$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y} = c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + c_2(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) + \cdots + c_p(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_p)$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y} = c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + c_2(\quad 0 \quad) + \cdots + c_p(\quad 0 \quad)$$

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \underbrace{\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1}_{\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{y}} + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p$$

Exemple 2

Trouver les coordonnées de $\boldsymbol{y} = (1,1,1)$ dans la base $B = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3})$, où

$$\boldsymbol{u_1} = (1,0,-2), \qquad \boldsymbol{u_2} = (2,1,1), \qquad \boldsymbol{u_3} = (2,-5,1).$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{y} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{y} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_3}\boldsymbol{y} \\
&= \frac{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3}\boldsymbol{u}_3 \\
&= \frac{(1,0,-2)\cdot(1,1,1)}{(1,0,-2)\cdot(1,0,-2)}\boldsymbol{u}_1 + \frac{(2,1,1)\cdot(1,1,1)}{(2,1,1)\cdot(2,1,1)}\boldsymbol{u}_2 + \frac{(2,-5,1)\cdot(1,1,1)}{(2,-5,1)\cdot(2,-5,1)}\boldsymbol{u}_3 \\
&= \frac{-1}{5}\boldsymbol{u}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{u}_2 + \frac{-1}{15}\boldsymbol{u}_3
\end{aligned}$$

Résumé

- Définition de famille orthogonale
- Exemple 1
- Théorème – Base orthogonale
- Exemple 1 – revisité
- Théorème – Coordonnées dans une base orthogonale
- Exemple 2

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Université de Montréal

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC