Produit scalaire

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

$$u = (1, 4, 5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v = (7, 0, 3) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u \cdot v = u^T v =$$

Définition

Produit scalaire

Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est le nombre réel

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

$$(1, 2, 0) \cdot (9, 0, 4) =$$

Exemple 2

$$(7,-1,0,3)\cdot(2,9,0,1)=$$

$$(2,9,0,1)\cdot(7,-1,0,3)=$$

$$(6,3)\cdot(6,3)=$$

Proposition

Propriétés du produit scalaire

Soit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et c un nombre réel. Alors

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$;
2. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$;
3. $(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$;
4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$ et $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Preuve

Propriété 2 du produit scalaire

2. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) =$

Preuve

Propriété 4 du produit scalaire

4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$ et $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Résumé

- Exemple 1
- Définition de produit scalaire
- Exemple 2
- Propriétés du produit scalaire
    1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
    2. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
    3. $(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$
    4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$ et $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Université de Montréal

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Julien Lafortune

Mathéma-TIC

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC