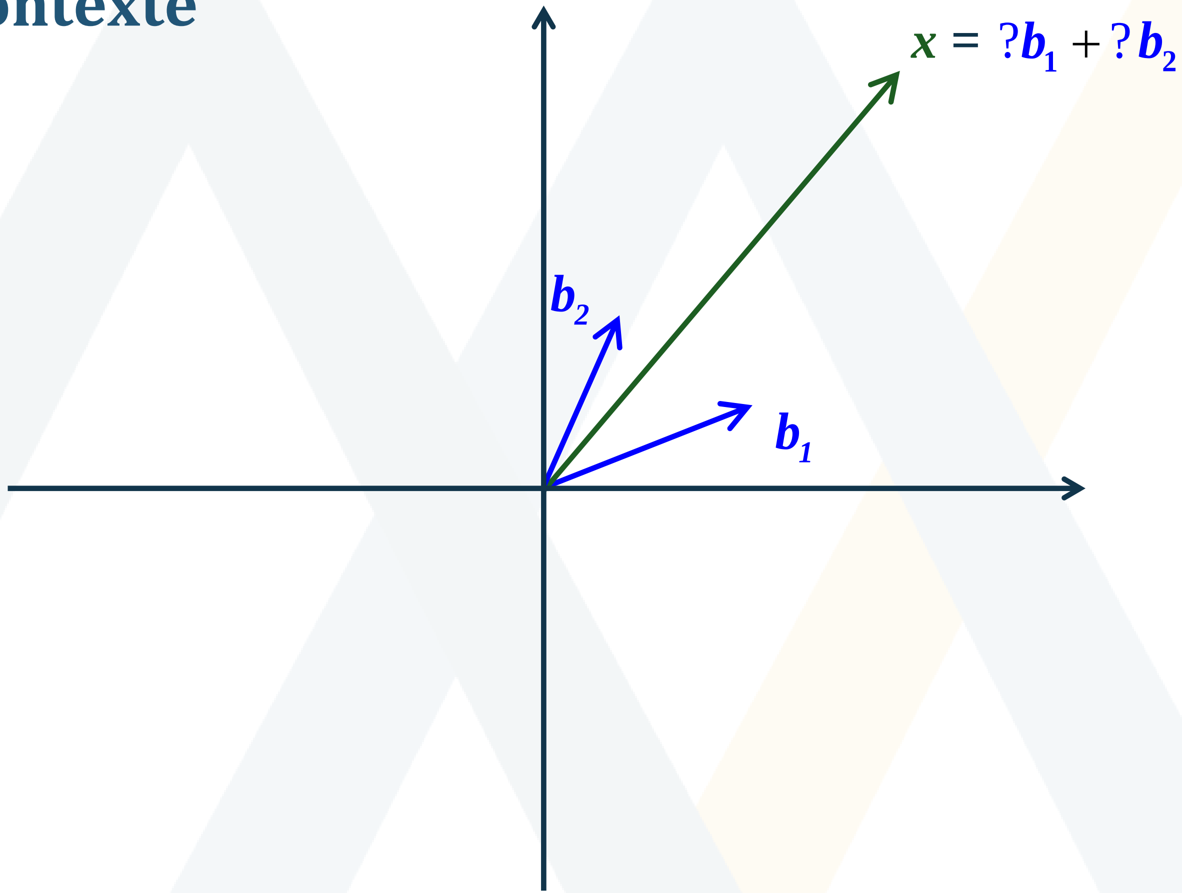
Mathéma-TIC

Matrice de changement de base

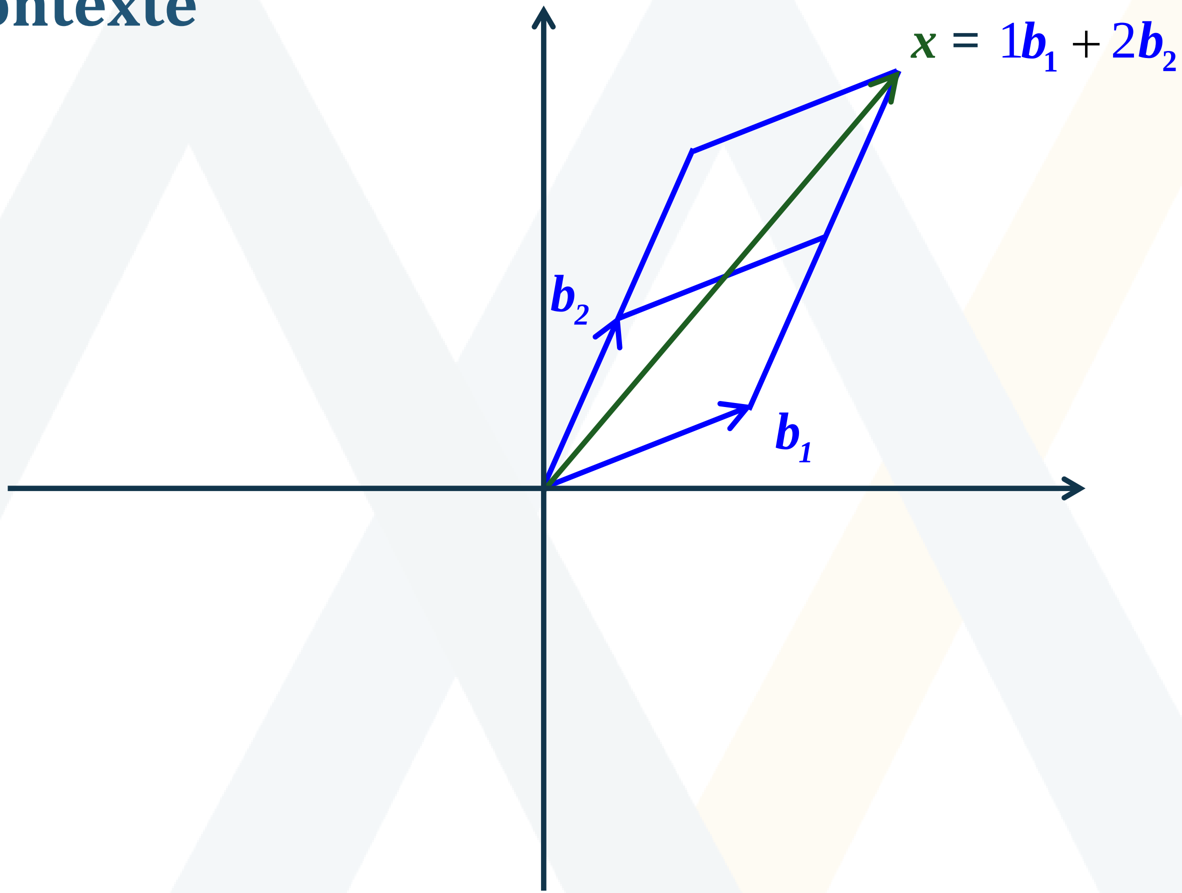
Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

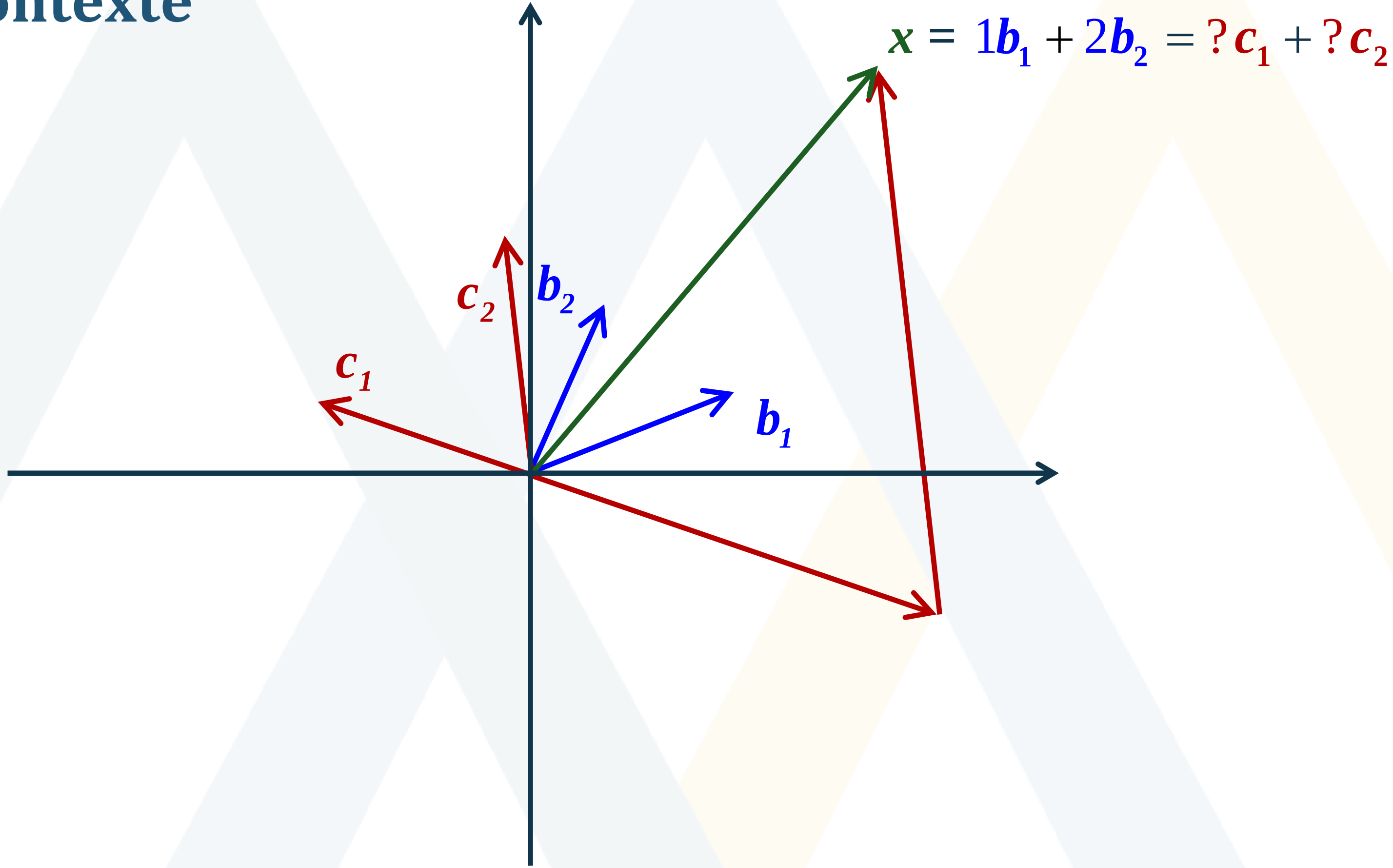
Mise en contexte



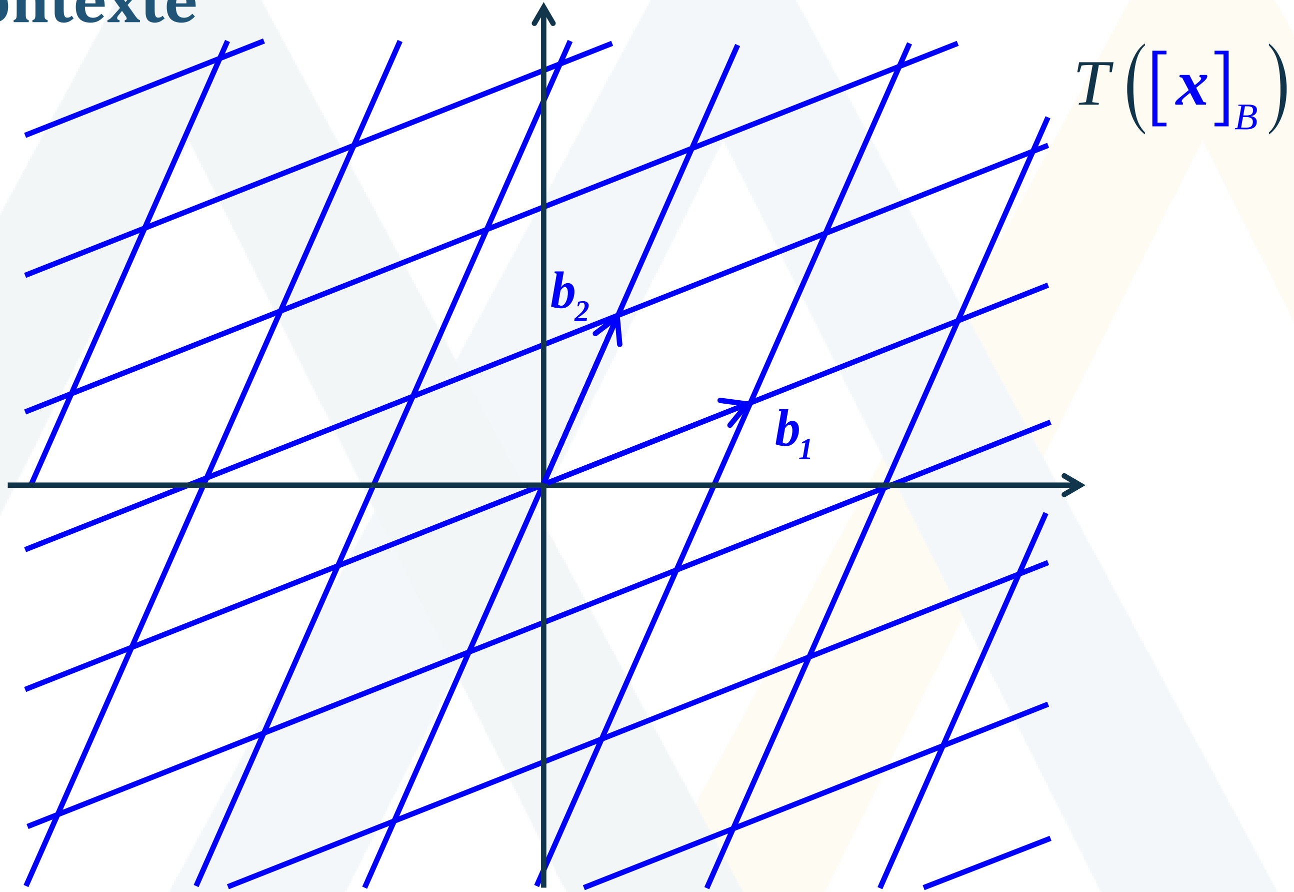
Mise en contexte



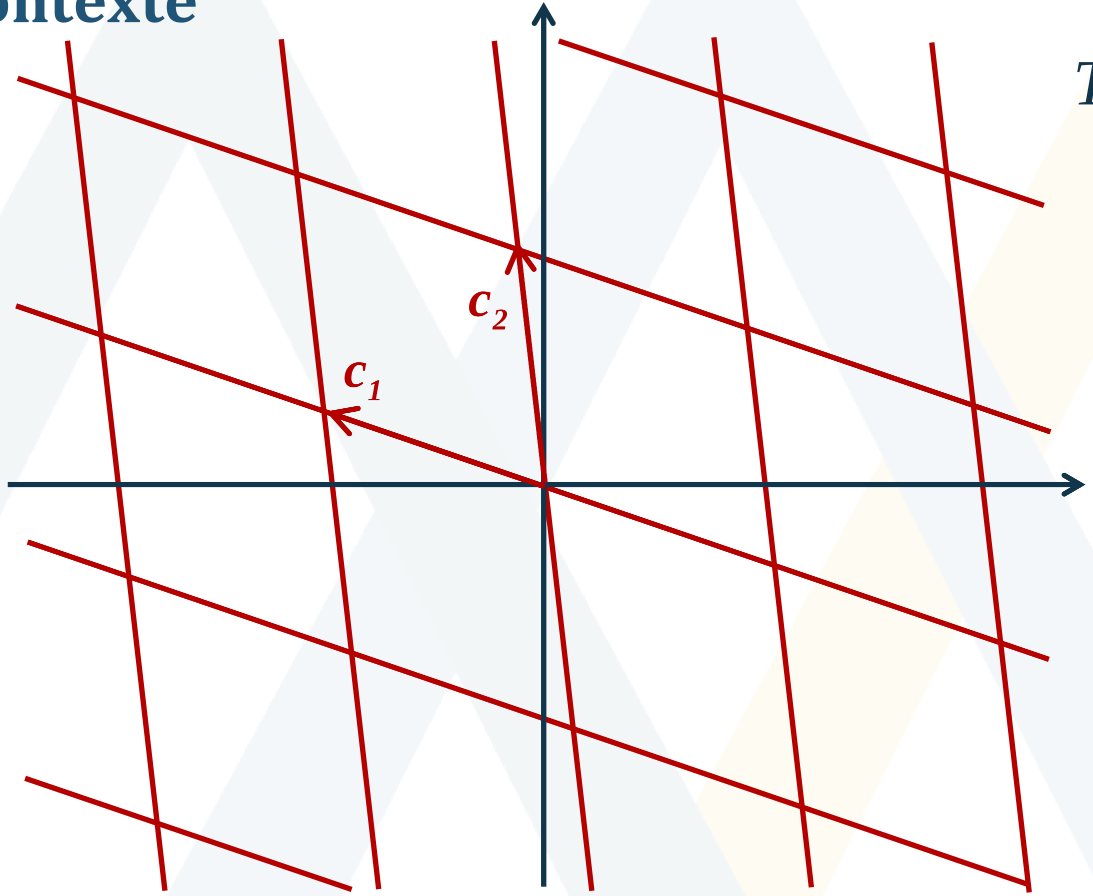
Mise en contexte



Mise en contexte



Mise en contexte



$$T\left(\left[\mathbf{x}\right]_B\right) = \left[\mathbf{x}\right]_C$$

$$A\left[\mathbf{x}\right]_B = \left[\mathbf{x}\right]_C$$

$$A = ?$$

Exemple 1

Soient $B = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$ et $C = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2})$, deux bases de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $[\boldsymbol{x}]_B$ sachant que $[\boldsymbol{x}]_C = (2, 5)$ et que

$$\boldsymbol{b_1} = 2\boldsymbol{c_1} + 3\boldsymbol{c_2} \text{ et } \boldsymbol{b_2} = 3\boldsymbol{c_1} + 4\boldsymbol{c_2}.$$

$$[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \alpha_1(\quad \boldsymbol{b_1} \quad) + \alpha_2(\quad \boldsymbol{b_2} \quad) \\ \boldsymbol{x} &= \alpha_1(2\boldsymbol{c_1} + 3\boldsymbol{c_2}) + \alpha_2(3\boldsymbol{c_1} + 4\boldsymbol{c_2}) \\ \boldsymbol{x} &= (2\alpha_1 + 3\alpha_2)\boldsymbol{c_1} + (3\alpha_1 + 4\alpha_2)\boldsymbol{c_2} \end{aligned}$$

$$[\boldsymbol{x}]_C = (2\alpha_1 + 3\alpha_2, 3\alpha_1 + 4\alpha_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \left([\boldsymbol{b_1}]_C \quad [\boldsymbol{b_2}]_C \right) [\boldsymbol{x}]_B = P_{C \leftarrow B} [\boldsymbol{x}]_B$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{P_{C \leftarrow B}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{[\boldsymbol{x}]_C} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{P_{C \leftarrow B}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{P_{C \leftarrow B}} [\boldsymbol{x}]_B = [\boldsymbol{x}]_B \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = 7\boldsymbol{b_1} - 4\boldsymbol{b_2}$$

Théorème

Matrice de changement de base

Soient $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ et $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ deux bases d'un espace vectoriel V. Il existe une unique matrice $n \times n$ (notée $P_{C \leftarrow B}$) telle que pour tout $\boldsymbol{x} \in V$

$$[\boldsymbol{x}]_C = P_{C \leftarrow B}[\boldsymbol{x}]_B, \text{ où } P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1]_C & \cdots & [\boldsymbol{b}_n]_C \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est appelée la matrice de changement de base de B à C. De plus, $P_{C \leftarrow B}$ est inversible et

$$P_{C \leftarrow B}^{-1}[\boldsymbol{x}]_C = [\boldsymbol{x}]_B,$$

d'où

$$P_{C \leftarrow B}^{-1} = P_{B \leftarrow C}.$$

Exemple 2

Trouver $P_{C\leftarrow B}$, où $B = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3})$, $\boldsymbol{b_1} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{b_2} = (1,1,0)$ et $\boldsymbol{b_3} = (1,0,0)$, et où $C = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3})$, $\boldsymbol{c_1} = (0,1,3)$, $\boldsymbol{c_2} = (1,0,-2)$ et $\boldsymbol{c_3} = (1,0,1)$.

$$P_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1]_C & [\boldsymbol{b}_2]_C & [\boldsymbol{b}_3]_C \end{bmatrix}$$

$$x_1\boldsymbol{c_1} + x_2\boldsymbol{c_2} + x_3\boldsymbol{c_3} = \boldsymbol{b}_1 \qquad y_1\boldsymbol{c_1} + y_2\boldsymbol{c_2} + y_3\boldsymbol{c_3} = \boldsymbol{b}_2 \qquad z_1\boldsymbol{c_1} + z_2\boldsymbol{c_2} + z_3\boldsymbol{c_3} = \boldsymbol{b}_3$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_1 \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_2 \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_3$$

$$\left(\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \boldsymbol{c}_3 \,|\, \boldsymbol{b}_1\right) \sim \left(I \;\middle|\; [\boldsymbol{b}_1]_C\right) \qquad \left(\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \boldsymbol{c}_3 \,|\, \boldsymbol{b}_2\right) \sim \left(I \;\middle|\; [\boldsymbol{b}_2]_C\right) \qquad \left(\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \boldsymbol{c}_3 \,|\, \boldsymbol{b}_3\right) \sim \left(I \;\middle|\; [\boldsymbol{b}_3]_C\right)$$

$$\left(\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \boldsymbol{c}_3 \,|\, \boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{b}_3\right) \sim \left(I \;\middle|\; \underbrace{[\boldsymbol{b}_1]_C \quad [\boldsymbol{b}_2]_C \quad [\boldsymbol{b}_3]_C}_{P_{C\leftarrow B}}\right)$$

Exemple 2

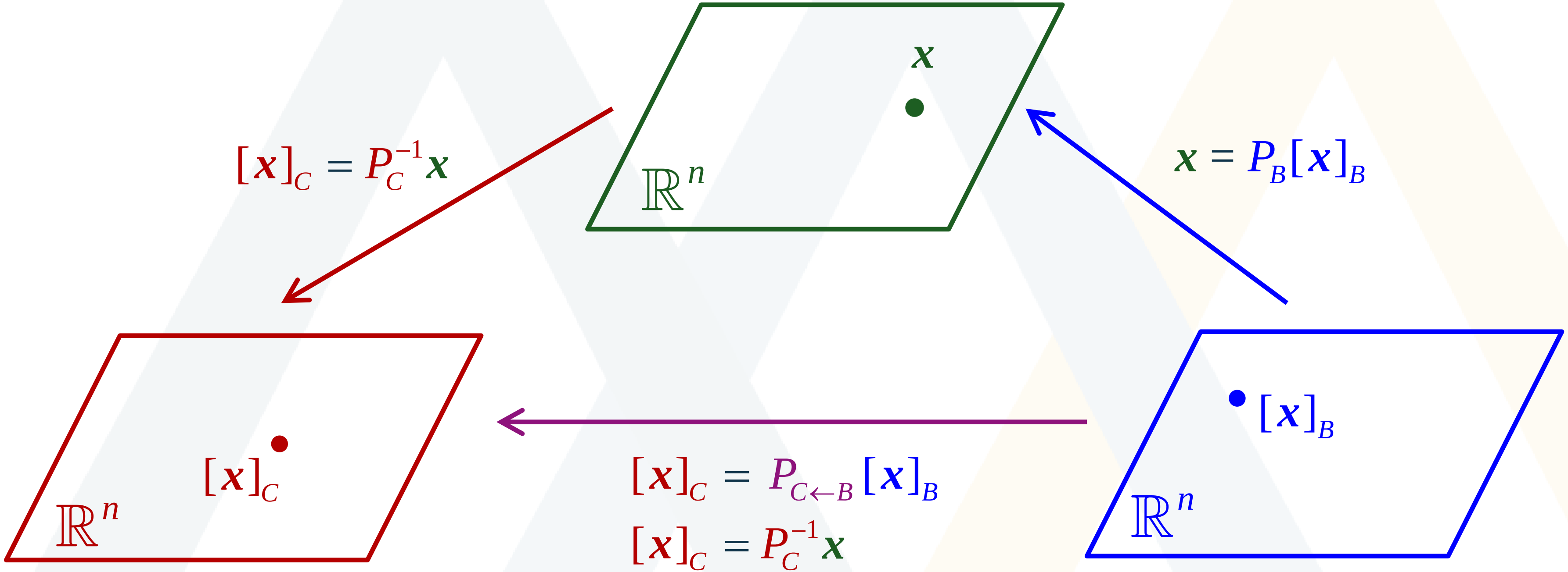
Trouver $P_{C\leftarrow B}$, où $B = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3})$, $\boldsymbol{b_1} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{b_2} = (1,1,0)$ et $\boldsymbol{b_3} = (1,0,0)$, et où $C = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3})$, $\boldsymbol{c_1} = (0,1,3)$, $\boldsymbol{c_2} = (1,0,-2)$ et $\boldsymbol{c_3} = (1,0,1)$.

$$\left(\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \boldsymbol{c}_3 \,\middle|\, \boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{b}_3\right) \sim \left(I \,\middle|\, [\boldsymbol{b}_1]_C \quad [\boldsymbol{b}_2]_C \quad [\boldsymbol{b}_3]_C\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$P_{C\leftarrow B}$$

Lien avec les matrices de passage



$$[\mathbf{x}]_C = P_{C\leftarrow B}[\mathbf{x}]_B$$

$$[\mathbf{x}]_C = P_C^{-1}\mathbf{x}$$

$$[\mathbf{x}]_C = P_C^{-1}P_B[\mathbf{x}]_B$$

$$\Longrightarrow \quad P_{C\leftarrow B} = P_C^{-1}P_B$$

Exemple 2 - revisité

Trouver $P_{C\leftarrow B}$, où $B = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3})$, $\boldsymbol{b_1} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{b_2} = (1,1,0)$ et $\boldsymbol{b_3} = (1,0,0)$, et où $C = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3})$, $\boldsymbol{c_1} = (0,1,3)$, $\boldsymbol{c_2} = (1,0,-2)$ et $\boldsymbol{c_3} = (1,0,1)$.

$$P_{C\leftarrow B} = P_C^{-1} P_B$$

$$P_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{C\leftarrow B} = P_C^{-1} P_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Résumé

- Exemple 1
- Théorème: Matrice de changement de base
- Exemple 2
- Lien avec les matrices de passage
- Exemple 2 - revisité

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Université de Montréal

christian.cote@collanaud.qc.ca

Karima Amoura

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC