Base d’un espace vectoriel

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l’Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d’intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

Montrer que tout vecteur $\boldsymbol{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{u_1} = (1,1)$ et $\boldsymbol{u_2} = (-1,1)$.

Définition

Ensemble générateur

Un ensemble B de vecteurs de l'espace vectoriel V est un **ensemble générateur** de V si tout élément de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de B.

Exemple 2

Montrer que $\boldsymbol{u_1} = (1,1)$ et $\boldsymbol{u_2} = (-1,1)$ sont linéairement indépendants.

Définition

Base d'un espace vectoriel

Un ensemble B de vecteurs de l'espace vectoriel V est une **base** de V si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

a) les vecteurs de B sont linéairement indépendants;

b) B est un ensemble générateur de V.

Exemple 3

Les vecteurs $\boldsymbol{u_1} = (-1,3,4)$, $\boldsymbol{u_2} = (1,5,-1)$ et $\boldsymbol{u_3} = (1,3,-2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

a) Indépendance linéaire

$$c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + c_3\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple 3

b) Ensemble générateur:

$c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + c_3\boldsymbol{u_3} = (x, y, z)$ possède une solution pour tout (x, y, z)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & x \\ 3 & 5 & 3 & y \\ 4 & -1 & -2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-7x+y-2z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 9x-y+3z \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-23x+3y-8z}{2} \end{array}\right)$$

Exemple 4

Les vecteurs $\boldsymbol{u_1} = (1,2,3), \boldsymbol{u_2} = (-1,-1,1)$ et $\boldsymbol{u_3} = (1,3,7)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

a) Indépendance linéaire

$$c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + c_3\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Résumé

- Exemple 1
- Définition d’ensemble générateur
- Exemple 2
- Définition de base d’un espace vectoriel
- Exemple 3
- Exemple 4

Mathéma-TIC

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Université de Montréal

christian.cote@collanaud.qc.ca

Karima Amoura

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC

Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca