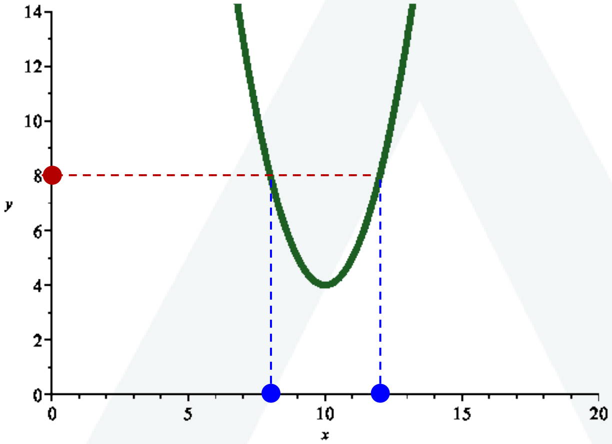
Injectivité

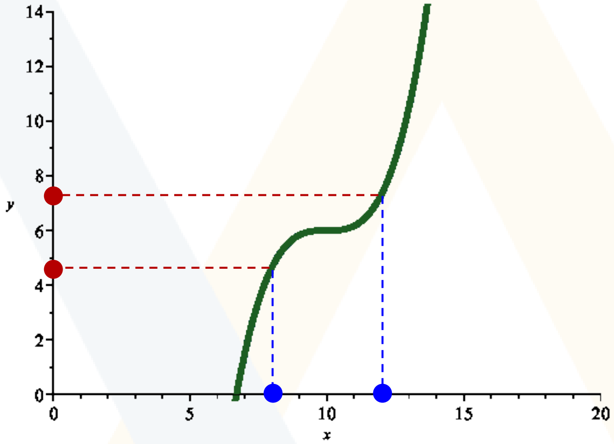
Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l’Université de Montréal
christian.cote@cegep-lanaudiere.qc.ca

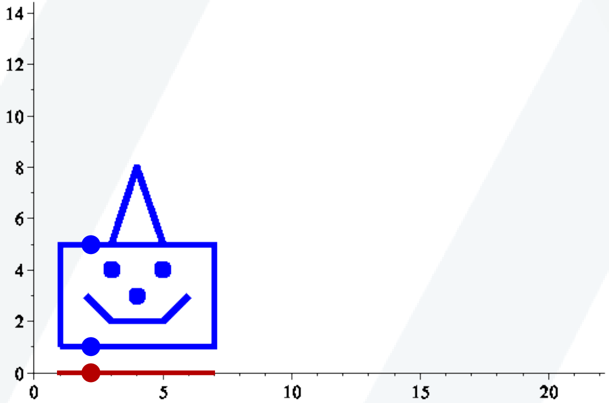
Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d’intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Mise en contexte

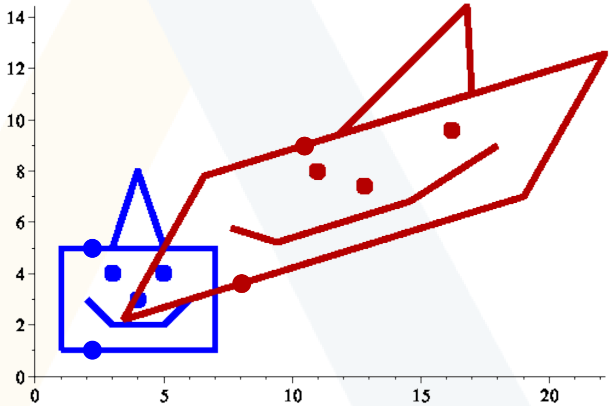


$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$





$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



Définition

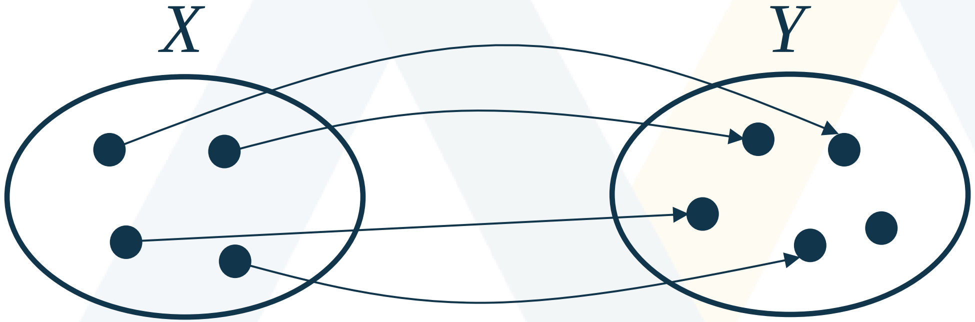
Fonction injective

Soit $f: X \to Y$ une fonction. On dit que f est **injective** si pour tout $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou, de façon équivalente,

$$x_1 = x_2 \Leftarrow f(x_1) = f(x_2)$$



Définition

Fonction injective

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est **injective** si pour tout $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou, de façon équivalente,

$$x_1 = x_2 \Leftarrow f(x_1) = f(x_2)$$

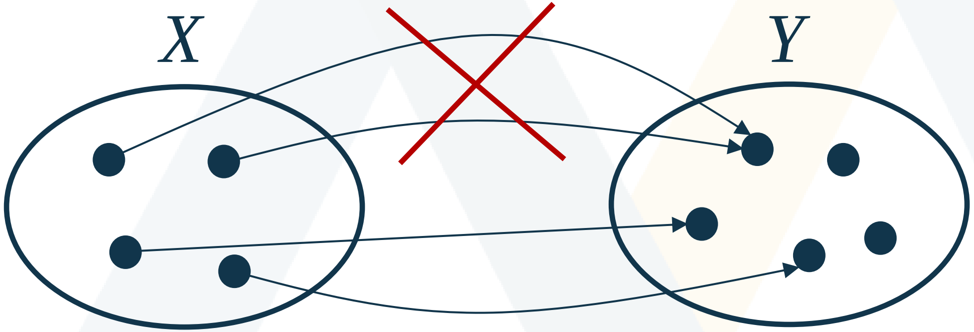
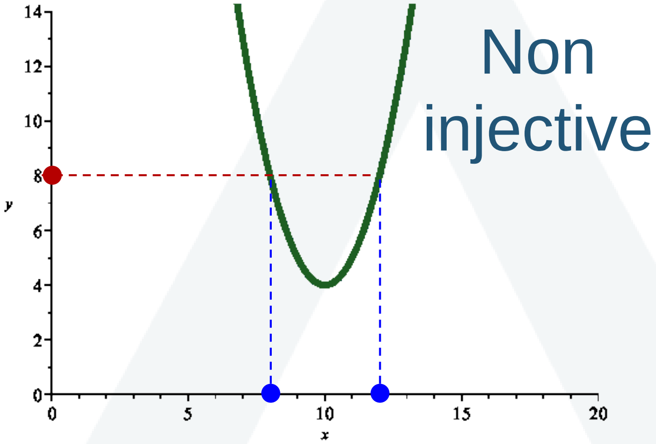
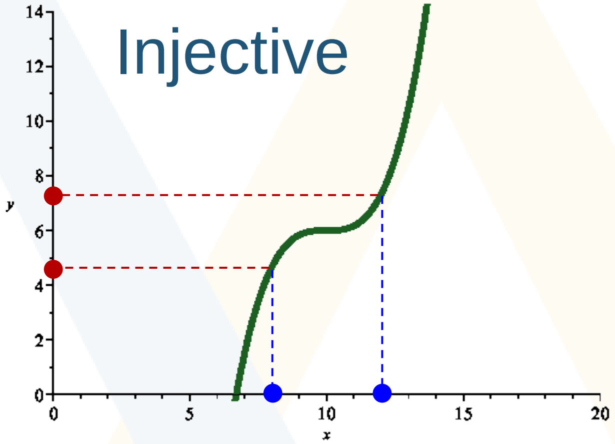
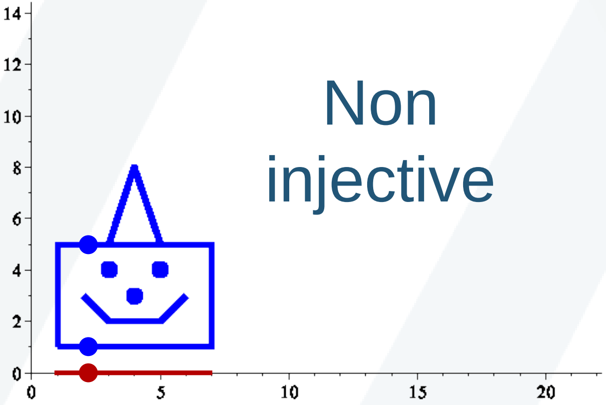


Illustration de la définition

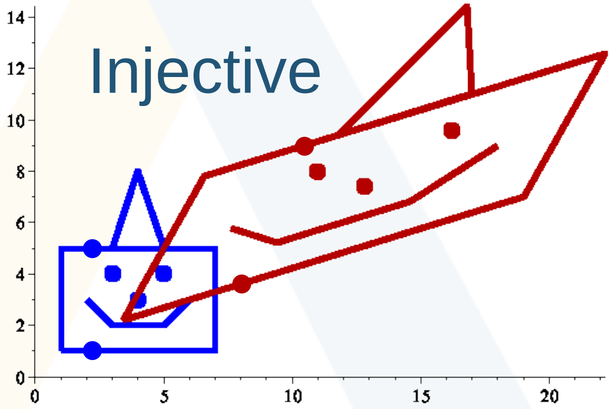


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Exemple 1

Dire si la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ est injective.

Exemple 2

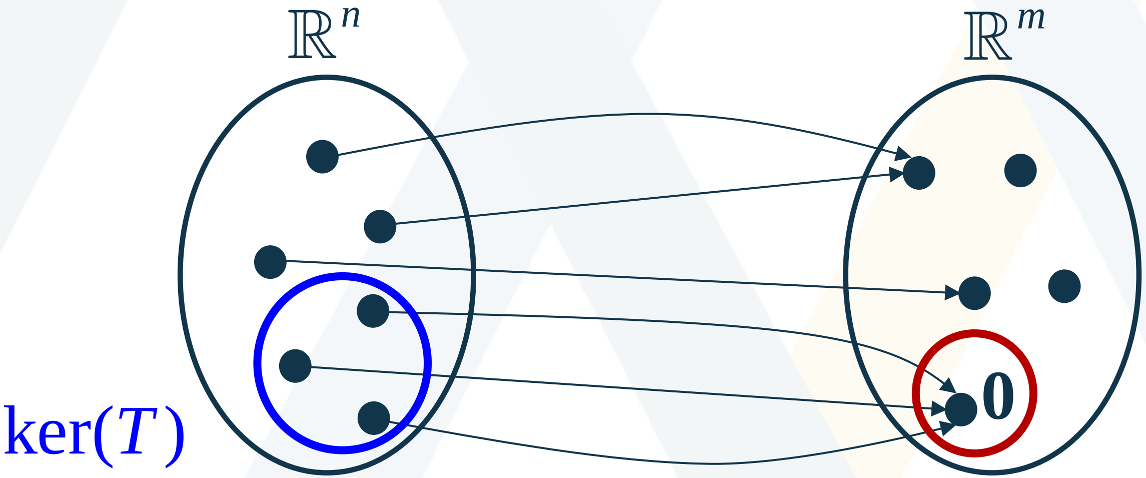
Dire si la fonction $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}$ est injective.

Définition

Noyau d'une transformation linéaire

Soit $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Le noyau de T, noté $\ker(T)$, est l'ensemble

$$\ker(T) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n | T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$



Exemple 3

Trouver le noyau de la transformation $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}$.

Exemple 4

Trouver le noyau de la transformation $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}$.

Théorème

Injectivité d'une transformation linéaire

Soit $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire.

$$T \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}.$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
T \text{ est injective} &\Leftrightarrow \text{pour tout } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \quad T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \\
&\Leftrightarrow \text{pour tout } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \quad T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{v}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \\
&\Leftrightarrow \text{pour tout } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \quad T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \text{pour tout } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \in \ker(T) \Rightarrow \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \text{pour tout } \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{w} \in \ker(T) \Rightarrow \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}
\end{aligned}
$$

Exemple 5

Dire si la transformation $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}$ est injective.

Exemple 6

Dire si la transformation $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}$ est injective.

Résumé

- $f: X \to Y$ est injective si pour tout $x_1, x_2 \in X$

  $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

  ou, de façon équivalente,

  $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \ker(T) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n | T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$

- T , linéaire, est injective $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\boldsymbol{0}\}.$

Conception du contenu
Christian Côté
Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu
Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC