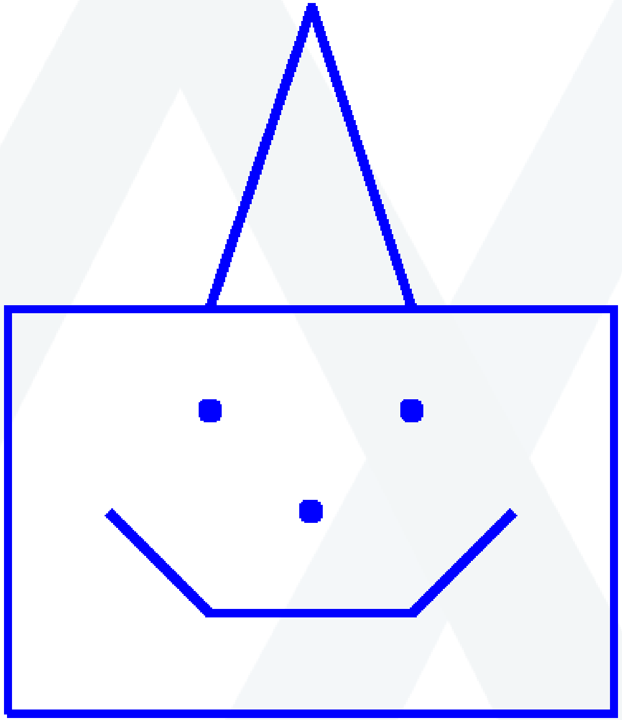
Réflexions et rotations dans le plan

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

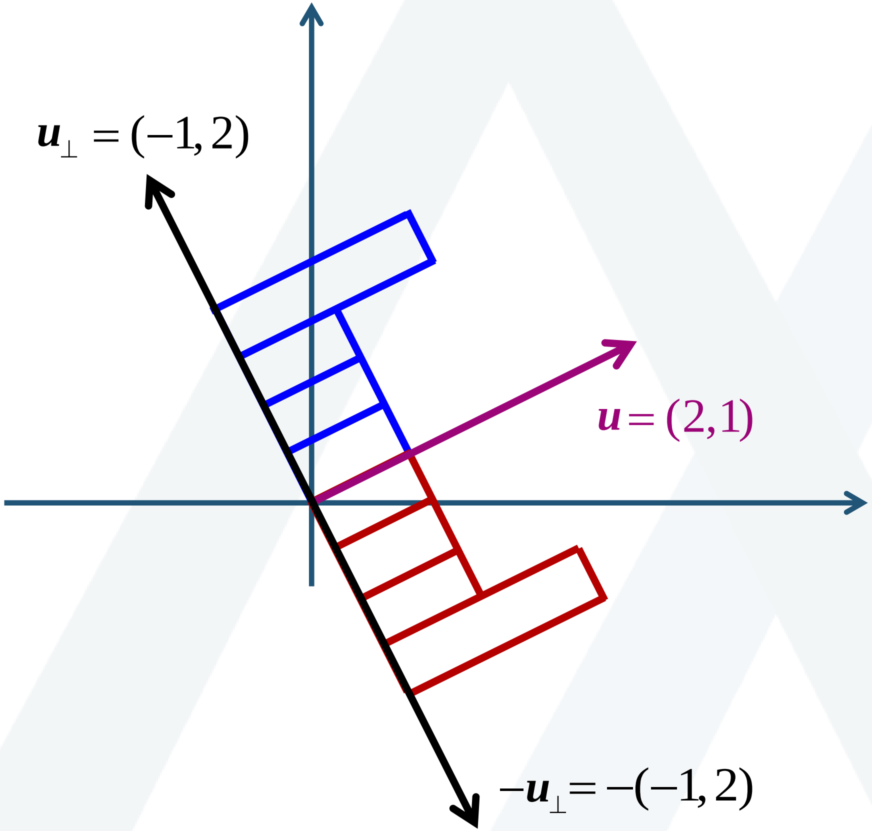
Mise en contexte



$$T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$$

$$A = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à une droite de direction $\boldsymbol{u}$



1. $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

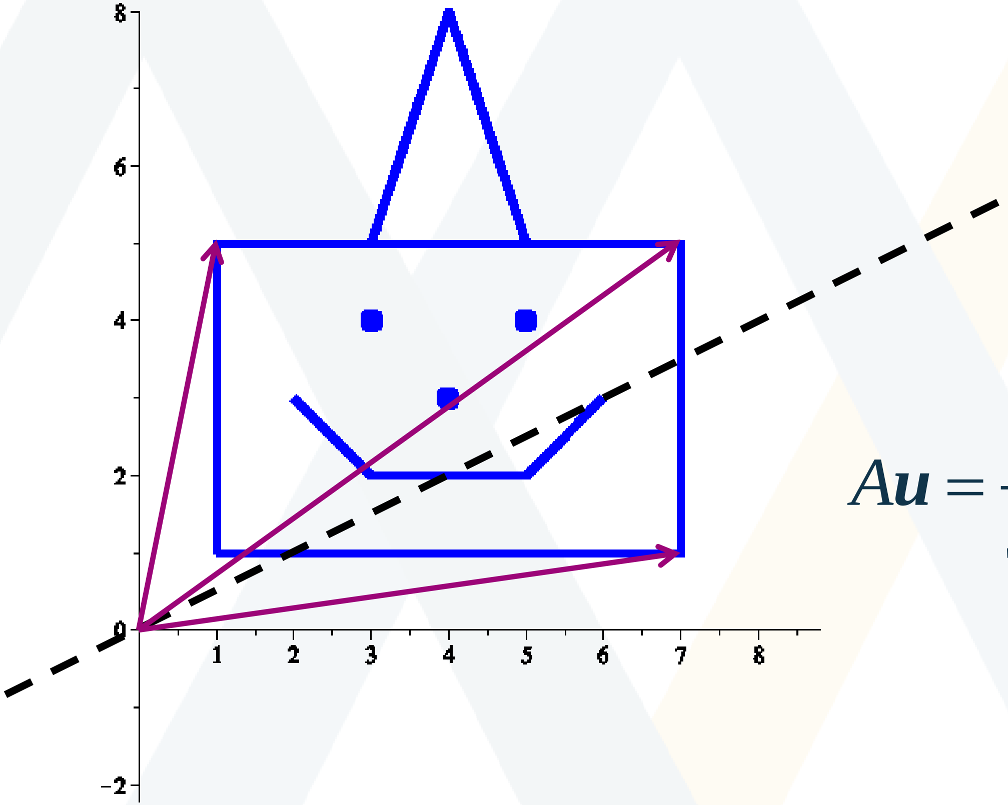
2. $A\boldsymbol{u}_\perp = -\boldsymbol{u}_\perp$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

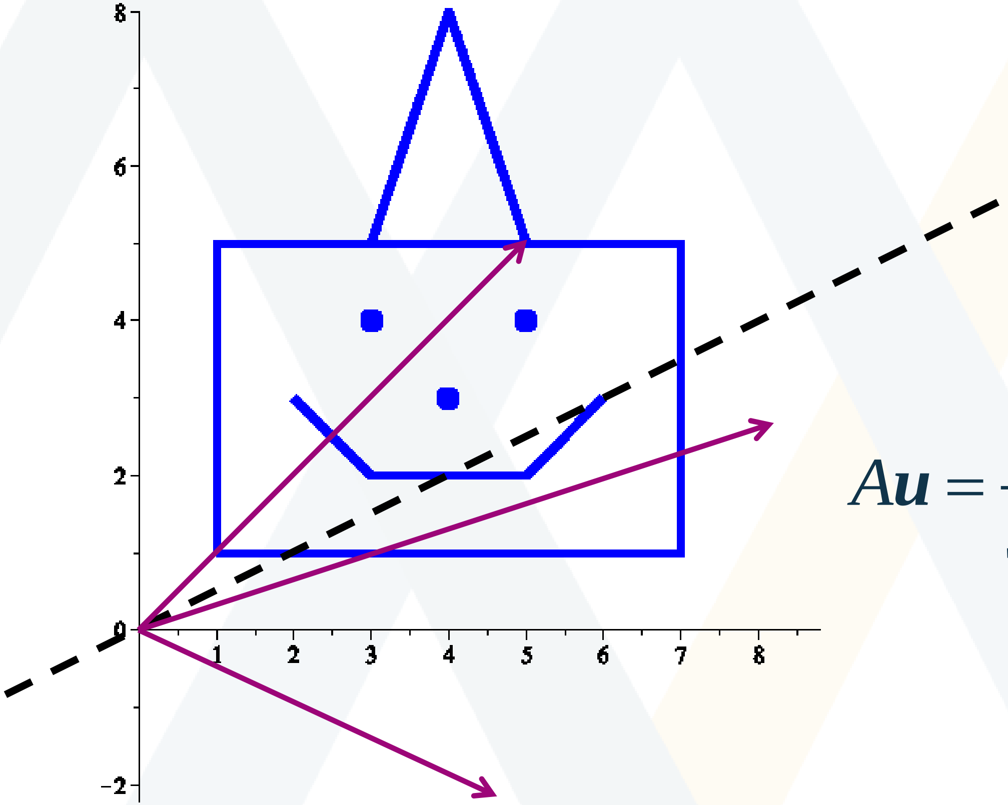
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à une droite de direction $(2,1)$



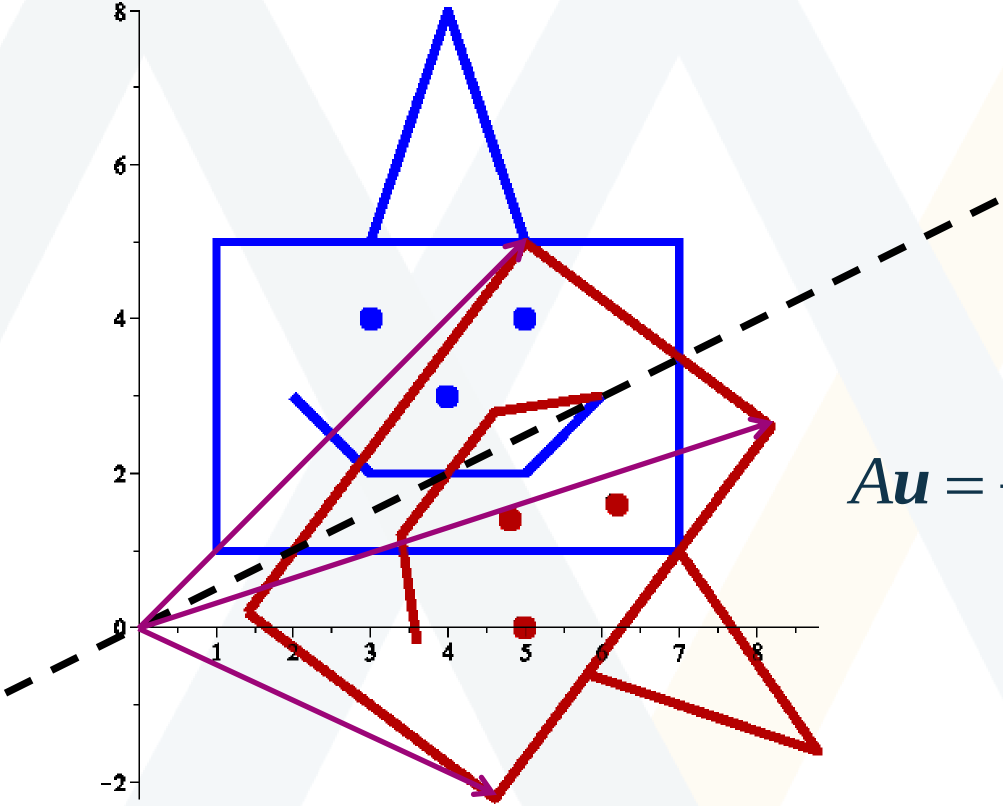
$$A\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à une droite de direction $(2, 1)$



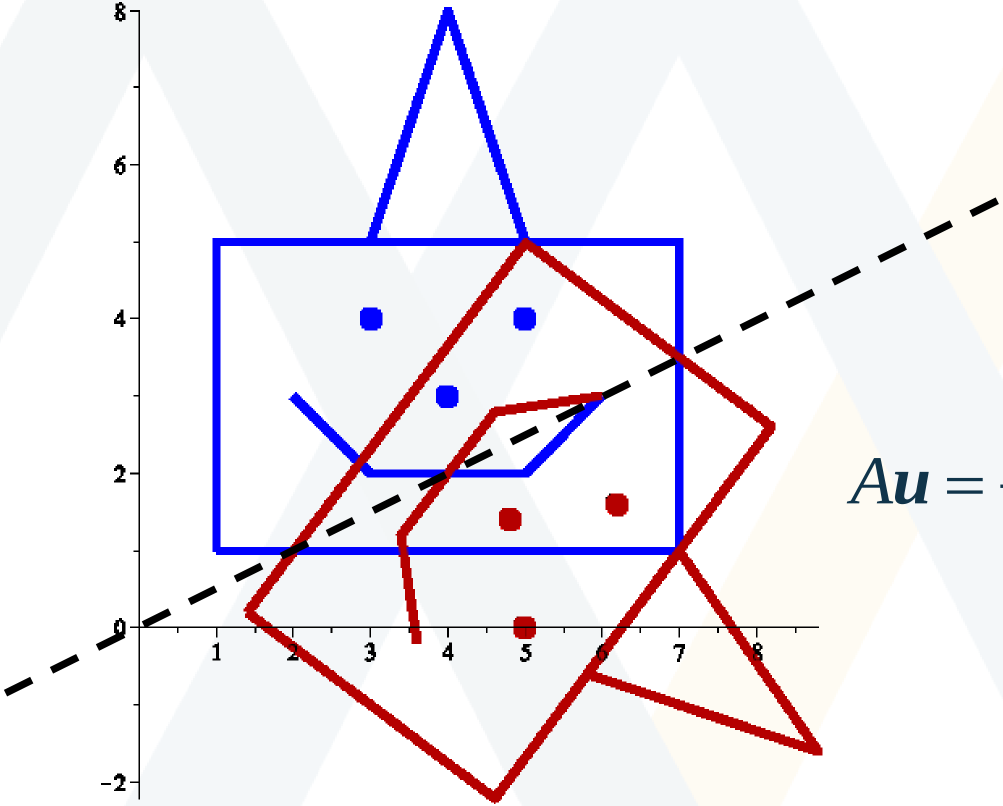
$$A\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à une droite de direction $(2,1)$



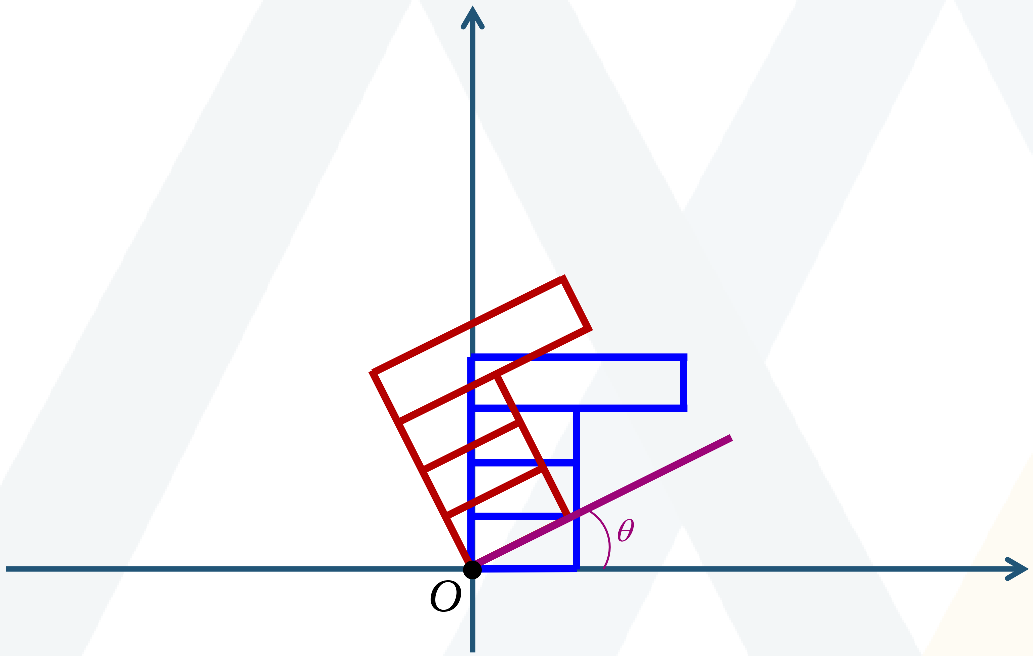
$$A\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à une droite de direction $(2,1)$

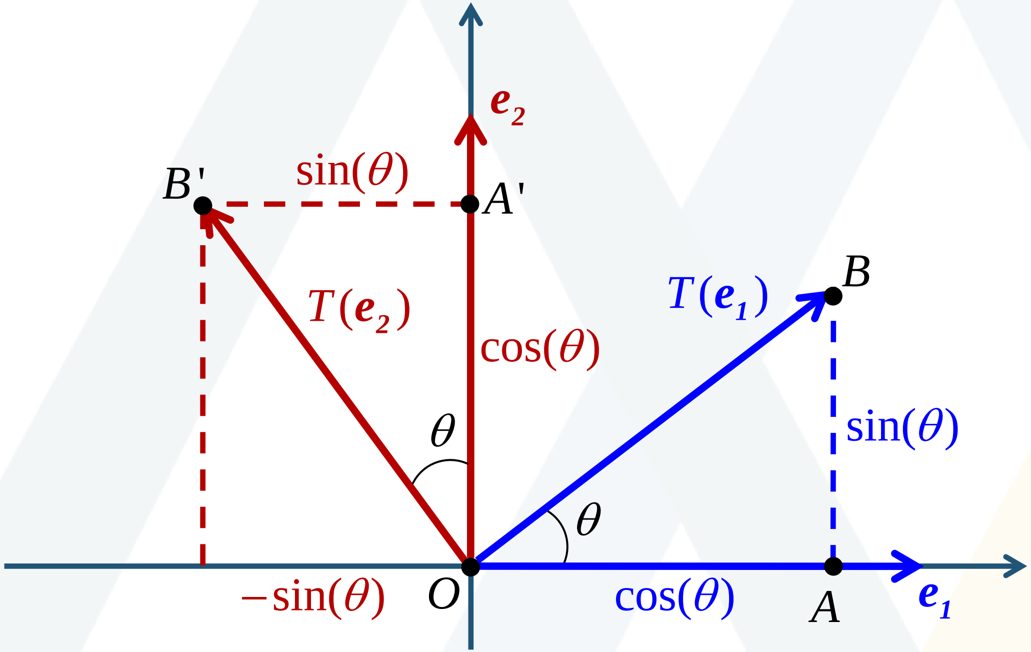


$$Au = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Rotation d'un angle θ autour de l'origine



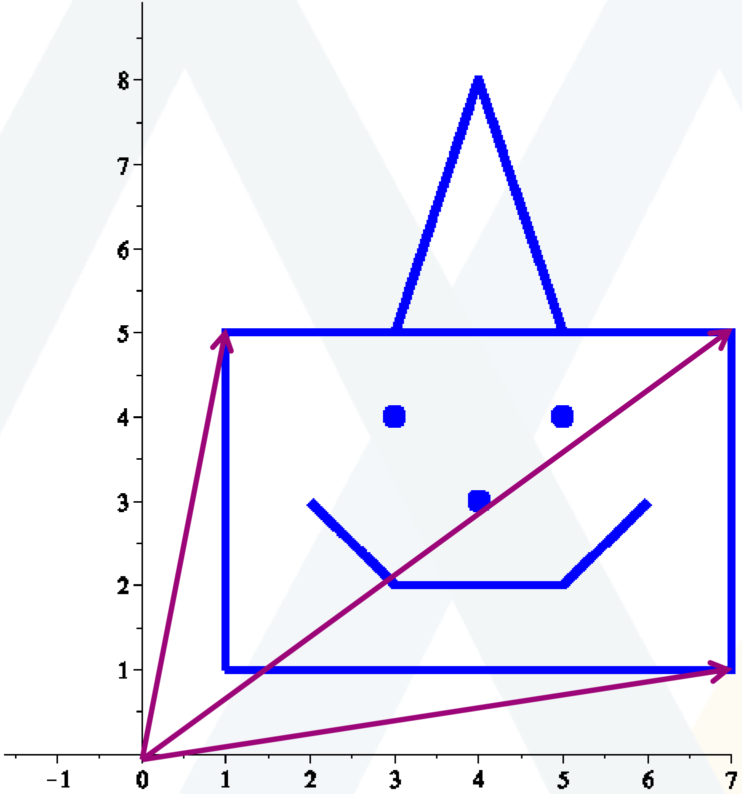
Rotation d'un angle θ autour de l'origine



$$T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T(e_1)} & \boldsymbol{T(e_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

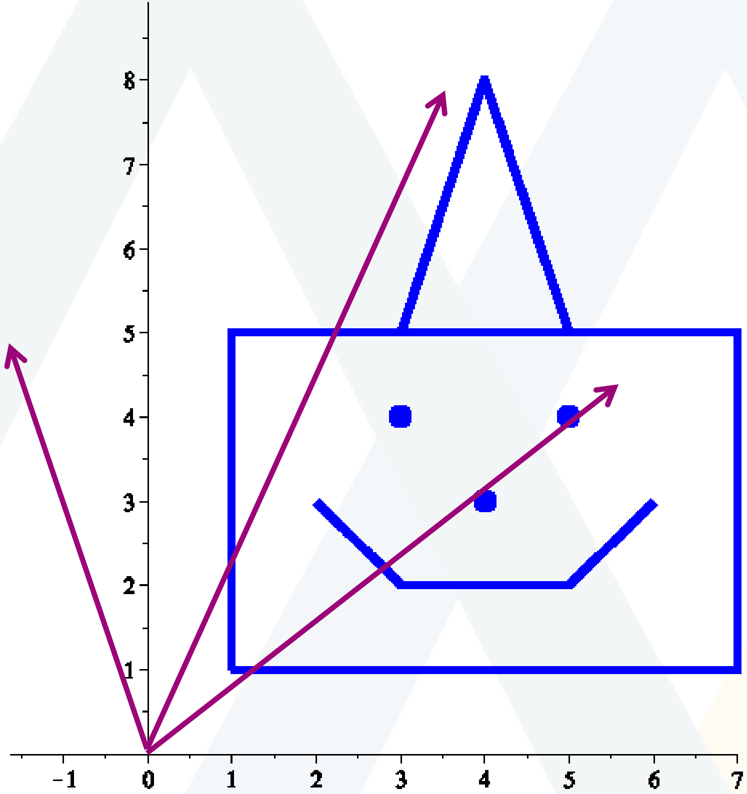
Rotation de $\pi/6$ autour de l'origine



$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

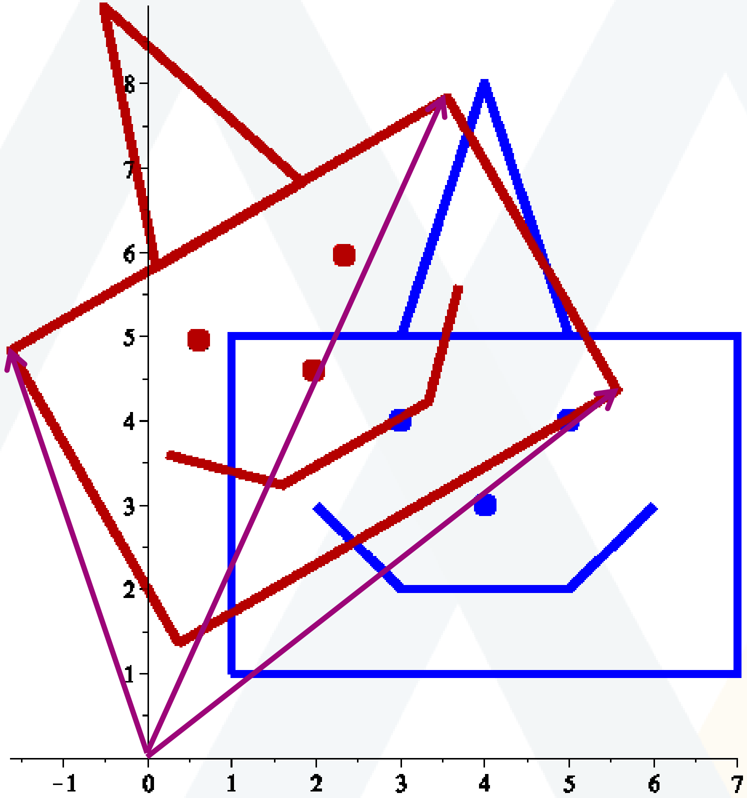
Rotation de $\pi/6$ autour de l'origine



$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

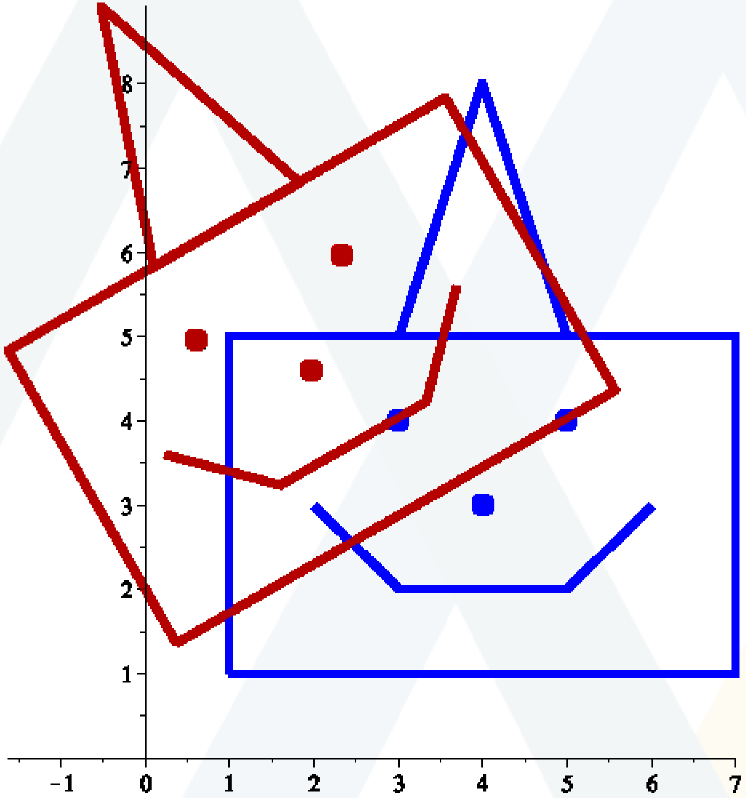
Rotation de $\pi/6$ autour de l'origine



$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

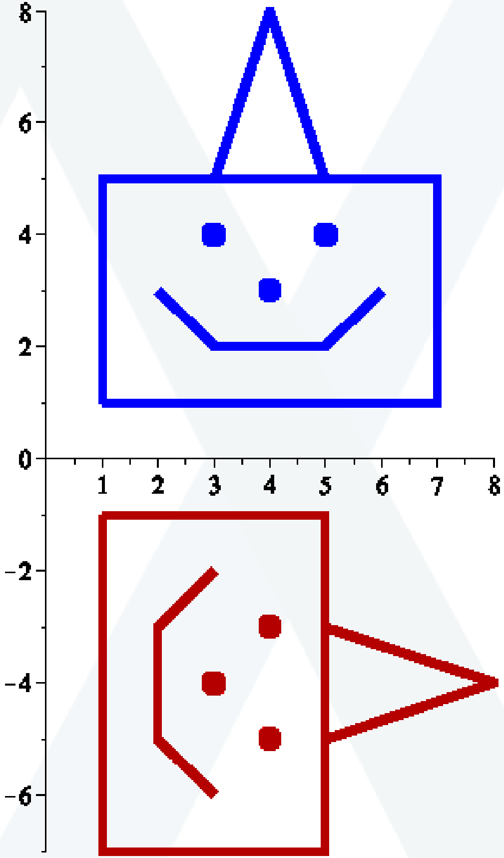
Rotation de $\pi/6$ autour de l'origine



$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Rotation de $-\pi/2$ autour de l'origine



$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Résumé

- Réflexions
- Rotations

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC