Transformation linéaire

Représentation matricielle

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

$$T_1(x,y) = (x-y, x+y)$$

$$T_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Théorème

Représentation matricielle

Soit T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Alors il existe une unique matrice A, de dimension $m \times n$, telle que

$$T(\boldsymbol{u}) = A \cdot \boldsymbol{u}.$$

Preuve

$$A \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & \cdots & (A)_{1n} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & \cdots & (A)_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (A)_{m1} & (A)_{m2} & \cdots & (A)_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A)_{11}u_1 + (A)_{12}u_2 + \cdots + (A)_{1n}u_n \\ (A)_{21}u_1 + (A)_{22}u_2 + \cdots + (A)_{2n}u_n \\ \vdots \\ (A)_{m1}u_1 + (A)_{m2}u_2 + \cdots + (A)_{mn}u_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A)_{11}u_1 \\ (A)_{21}u_1 \\ \vdots \\ (A)_{m1}u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (A)_{12}u_2 \\ (A)_{22}u_2 \\ \vdots \\ (A)_{m2}u_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} (A)_{1n}u_n \\ (A)_{2n}u_n \\ \vdots \\ (A)_{mn}u_n \end{pmatrix}$$

$$= u_1 \begin{pmatrix} (A)_{11} \\ (A)_{21} \\ \vdots \\ (A)_{m1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} (A)_{12} \\ (A)_{22} \\ \vdots \\ (A)_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + u_n \begin{pmatrix} (A)_{1n} \\ (A)_{2n} \\ \vdots \\ (A)_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= u_1\boldsymbol{a_1} + u_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + u_n\boldsymbol{a_n}$$

Preuve

Preuve

Exemple 1

Trouver la représentation matricielle de la transformation linéaire définie par

$$T(x, y) = (x - y, x + y).$$

Exemple 2

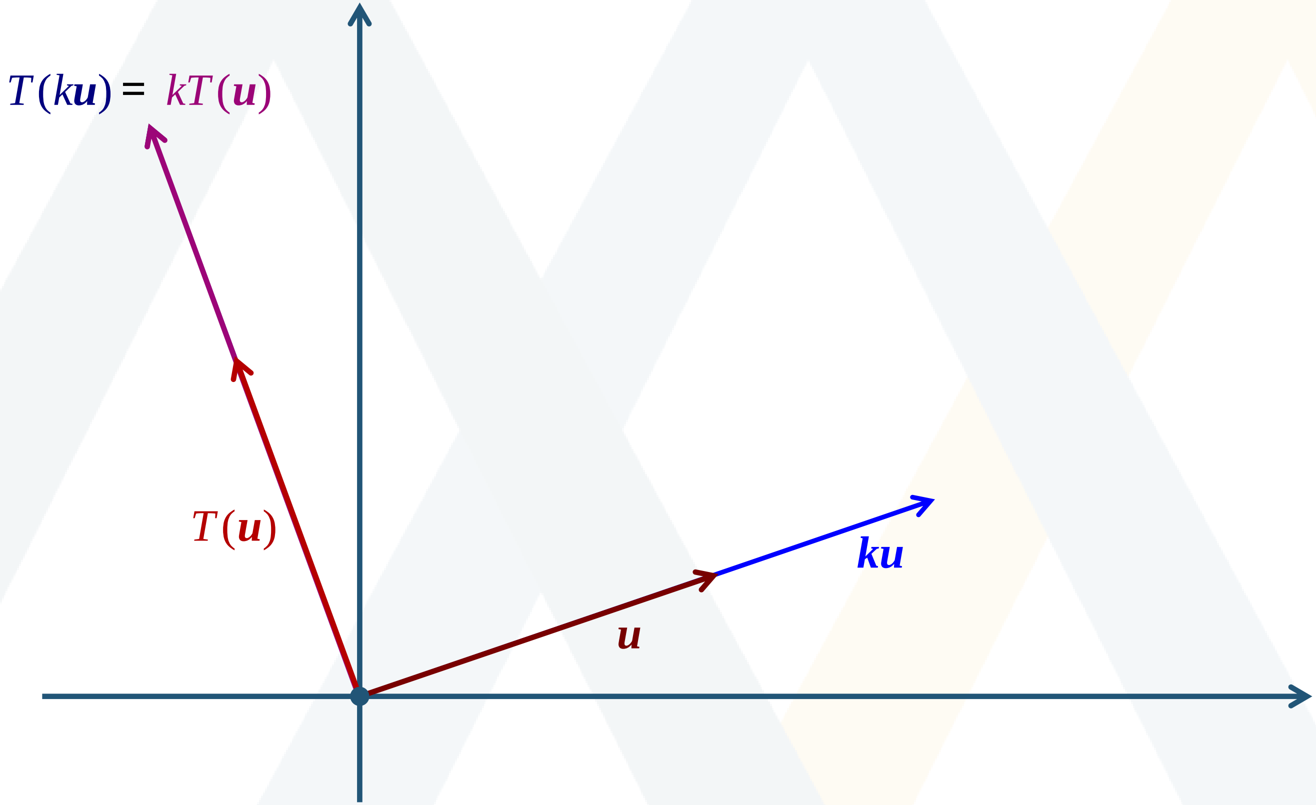
Trouver la représentation matricielle de la transformation linéaire définie par

$$T(x, y) = (2x + y, x - 3y, 4x - 7y).$$

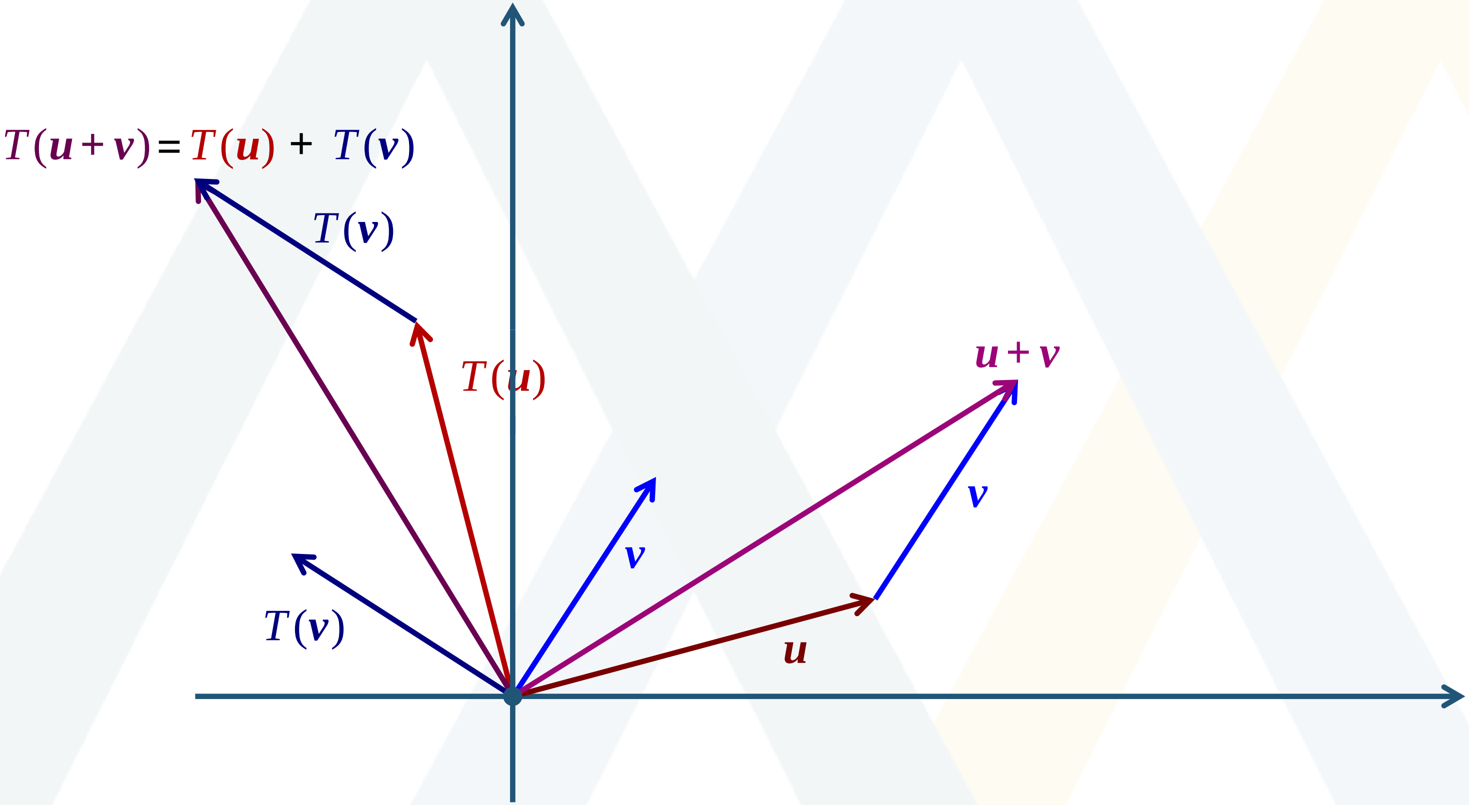
Exemple 3

Trouver la transformation qui permet de faire une rotation d’un vecteur du plan de 90° autour de l’origine dans le sens inverse des aiguilles d’une montre.

$$T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$$

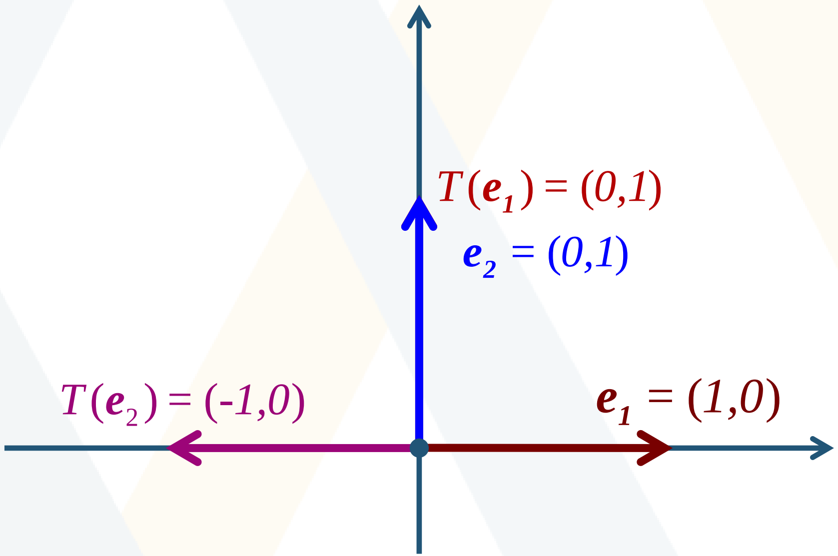


$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$$



Exemple 3

Trouver la transformation qui permet de faire une rotation d'un vecteur du plan de 90° autour de l'origine dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Résumé

- Représentation matricielle
- Exemples

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC