Espace vectoriel

Exemple

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Mise en contexte

Vérifier que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

Espace vectoriel

On appelle espace vectoriel tout ensemble non vide V constitué d'objets appelés vecteurs, sur lequel sont définies deux opérations (l'addition et la multiplication par un scalaire), vérifiant les 10 axiomes suivants.

Pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ et $c, d \in \mathbb{R}$, nous avons:

A1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$

A2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

A3) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

A4) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$

A5) $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$

A6) $c\boldsymbol{u} \in V$

A7) $c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$

A8) $(c + d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$

A9) $(cd)\boldsymbol{u} = c(d\boldsymbol{u})$

A10) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Exemple

Pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n=\{(x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

- A1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$
- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$
- A2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n).$

Exemple

Pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$

- A3) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
- $[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] + (z_1, \dots, z_n) =$
  $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n) =$
  $(x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n).$

  $(x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)] =$
  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) =$
  $(x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n).$

Exemple

Pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$

- A4) $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$
- A5) $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$
- A6) $c\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$

- $(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n).$
- $(x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, \dots, 0).$
- $c(x_1, \dots, x_n) = (\underbrace{cx_1}_{b_1}, \dots, \underbrace{cx_n}_{b_n}) = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$

Exemple

Pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$

- A7) $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$
- $c[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] = c[(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)] = (c(x_1+y_1), \dots, c(x_n+y_n)) = (cx_1+cy_1, \dots, cx_n+cy_n) = (cx_1, \dots, cx_n)+(cy_1, \dots, cy_n).$
- A8) $(c+d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$
- $(c+d)(x_1, \dots, x_n) = ((c+d)x_1, \dots, (c+d)x_n) = (cx_1+dx_1, \dots, cx_n+dx_n) = (cx_1, \dots, cx_n) + (dx_1, \dots, dx_n).$

Exemple

Pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$

- A9) $(cd)\boldsymbol{u} = c(d\boldsymbol{u})$

- $(cd)(x_1, \ldots, x_n) = ((cd)x_1, \ldots, (cd)x_n) = (c(dx_1), \ldots, c(dx_n)) = c(dx_1, \ldots, dx_n).$

- A10) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

- $1(x_1, \ldots, x_n) = (1x_1, \ldots, 1x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$

Résumé

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, car pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$, nous avons:

A1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

A2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

A3) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

A4) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$

A5) $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$

A6) $c\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$

A7) $c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$

A8) $(c + d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$

A9) $(cd)\boldsymbol{u} = c(d\boldsymbol{u})$

A10) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Mathéma-TIC

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Karima Amoura
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin
samuel.bernard@collanaud.qc.ca
hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Mathéma-TIC

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC

Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à **Mathema-TIC.ca**