Règle de Cramer

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Exemple 1

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} =$$

Exemple 2

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ -3x_1 + x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} =$$

Exemple 3

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 = 7 \\ -2x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} =$$

Théorème

Règle de Cramer

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, les composantes de l'unique solution du système d'équations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sont données par

$$x_i = \frac{|A_i(\boldsymbol{b})|}{|A|}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \ldots \quad \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \boldsymbol{a}_i \quad \boldsymbol{a}_{i+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$$

$$A_i(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1 \quad \ldots \quad \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}_{i+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$$

Préalables à la preuve

1. $AB = A(\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1 \quad A\boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad A\boldsymbol{b}_n)$

2. $\boldsymbol{e}_i = (0, \dots, 0,1,0, \dots 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad A\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i$

3. $|I_i(\boldsymbol{x})| = x_i$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + x_2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + x_3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Preuve

$$A \cdot I_i(\boldsymbol{x}) = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_{i-1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{e}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{e}_1 & A\boldsymbol{e}_2 & \cdots & A\boldsymbol{e}_{i-1} & A\boldsymbol{x} & A\boldsymbol{e}_{i+1} & \cdots & A\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = A_i(\boldsymbol{b})$$

$$|A| \cdot |I_i(\boldsymbol{x})| = |A \cdot I_i(\boldsymbol{x})| = |A_i(\boldsymbol{b})|$$

Avantages

1. Possibilité de trouver la valeur d'une variable sans connaître les autres.

2. Facile à implémenter dans un ordinateur.

3. Calculs simples dans le cas de systèmes 2×2 ou 3×3.

4. Utile dans le cas de systèmes avec paramètres.

Inconvénients

1. Ne fonctionne seulement que pour des systèmes ayant une unique solution.

2. Calculs très longs, à la main et à l'ordinateur, à partir de systèmes 4×4 et plus.

Résumé

- Exemples d’utilisation
- Règle de Cramer
- Preuve
- Avantages et inconvénients

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC