Matrices élémentaires

Christian Côté
Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal
christian.cote@collanaud.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Observation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \underset{L_{21}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_{21}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Définition

Matrice élémentaire

Une matrice élémentaire est une matrice obtenue de la matrice identité en effectuant une seule opération élémentaire ligne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_{12}(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12}(5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_{2}(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = E_{2}(4)$$

Proposition

Multiplication à gauche par une matrice élémentaire

Soit $A_{m\times n}$ une matrice quelconque et $E_{m\times m}$ une matrice élémentaire. La matrice obtenue de A par une opération élémentaire ligne est égale au produit EA.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_{31}(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition

Inverse des matrices élémentaires

Toute matrice élémentaire est inversible. En fait, on a

- $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$

$$E_{31}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_{31}(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}(3)E_{31}(-3) = I$$

Proposition

Inverse des matrices élémentaires

Toute matrice élémentaire est inversible. En fait, on a

- $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$
- $E_{ij}{}^{-1} = E_{ij}$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}\, E_{12} = I$$

Proposition

Inverse des matrices élémentaires

Toute matrice élémentaire est inversible. En fait, on a

- $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$
- $E_{ij}{}^{-1} = E_{ij}$
- $E_i(k)^{-1} = E_i(1/k)$.

$$E_2(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2(1/4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2(1/4)\, E_2(4) = I$$

Résumé

- Matrice élémentaire : $I \sim E$
- Soit $A \sim B$, alors on a $B = EA$.
- Les matrices élémentaires sont inversibles:

$$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$$
$$E_{ij}{}^{-1} = E_{ij}$$
$$E_i(k)^{-1} = E_i(1/k).$$

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC