Méthode de Gauss-Jordan

Solution unique

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(L_2 \to L_2 - 2L_1)]{L_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 12 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(L_3 \to L_3 + 2L_2)]{L_{32}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 32 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_2(-1) \\ (L_2 \to -L_2) \\ L_3(1/32) \\ (L_3 \to \frac{1}{32} L_3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_{13}(4) \\ (L_1 \to L_1 + 4L_3) \\ \\ L_{23}(12) \\ (L_2 \to L_2 + 12L_3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array}\right) \xrightarrow[(L_1 \to L_1 + L_2)]{L_{12}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array}\right)$$

Matrice augmentée échelonnée

Définition

Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan consiste à transformer la matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée réduite.

Proposition

Solutions d’un système d’équations linéaires

Un système d’équations linéaires peut avoir :

1. une solution unique;
2. une infinité de solutions;
3. aucune solution.

Exemple 2

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 14 \\ 0x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

(1)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(2)

Le système (1) a comme unique solution $(x_1, x_2, x_3) = (3, -2, 1/2)$.

Exemple 3

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array}\right)$$

Exemple 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vert & -15 \\ 5 & 3 & 2 & \vert & 0 \\ 3 & 1 & 3 & \vert & 11 \\ -6 & -4 & 2 & \vert & 30 \end{pmatrix}$$

$L_{21}(-5/3)\,(L_2 \to L_2 - \frac{5}{3}L_1)$

$L_{31}(-1)\quad (L_3 \to L_3 - L_1)$

$L_{41}(2)\ (L_4 \to L_4 + 2L_1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vert & -15 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \vert & 25 \\ 0 & -1 & 4 & \vert & 26 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2(-3)$

$(L_2 \to -3L_2)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vert & -15 \\ 0 & 1 & -11 & \vert & -75 \\ 0 & -1 & 4 & \vert & 26 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

$L_{32}(1)$

$(L_3 \to L_2 + L_1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vert & -15 \\ 0 & 1 & -11 & \vert & -75 \\ 0 & 0 & -7 & \vert & -49 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice augmentée échelonnée

Exemple 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matrice augmentée échelonnée

$L_3(-1/7)$

$(L_3 \to -\frac{1}{7}L_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right)$$

$L_{13}(1)$

$(L_1 \to L_1 + L_3)$

$L_{23}(11)$

$(L_2 \to L_2 + 11L_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right)$$

$L_{12}(-2)$

$(L_2 \to L_1 - 2L_2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right)$$

$L_1(1/3)$

$(L_1 \to \frac{1}{3}L_1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right)$$

Exemple 3

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

(1)

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -4 \\ \qquad x_2 \qquad = 2 \\ \qquad\qquad x_3 = 7 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

(2)

Le système (1) admet comme unique solution $(x_1, x_2, x_3) = (-4,2,7)$.

Résumé

- Exemple 1
- Définition de la méthode de Gauss-Jordan
- Proposition
- Exemple 2
- Exemple 3

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Karima Amoura

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC