Mathéma-TIC

Méthode de Gauss-Jordan

Infinité de solutions

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d’intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(L_2 \to L_2 - L_1)]{L_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(L_1 \to L_1 + \frac{2}{3} L_2)]{L_{12}(2/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array}\right)$$

Matrice augmentée échelonnée

$$\xrightarrow[(L_2 \to -\frac{1}{3} L_2)]{L_2(-1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array}\right)$$

Définition

Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan consiste à transformer la matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée réduite.

Proposition

Solutions d’un système d’équations linéaires

Un système d’équations linéaires peut avoir :

1. une solution unique;
2. une infinité de solutions;
3. aucune solution.

Exemple 2

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 3 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(2)

Le système (1) a une infinité de solutions $(x_1, x_2, x_3) = (3 - s, s, s)$, pour s un réel.

Définition

Variables de base et variables libres

Les variables de base (principales) sont les inconnues aux positions des pivots dans la matrice échelonnée réduite. Les autres variables sont les variables libres.

Exemple 3

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2 \\ -2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Exemple 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_{21}(-3) \\ (L_2 \to L_2 - 3L_1) \\ \\ L_{31}(2) \\ (L_3 \to L_3 + 2L_1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_{32}(1) \\ (L_3 \to L_3 + L_2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matrice augmentée échelonnée

$$\begin{array}{c} L_{12}(1) \\ (L_1 \to L_1 + L_2) \\ \\ L_2(-1) \\ (L_2 \to -L_2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matrice augmentée échelonnée réduite

Exemple 3

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2 \\ -2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \end{cases}$$

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 = 4 \\ \qquad x_2 + 5x_3 = -5 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

(2)

Le système (1) a une infinité de solutions $(x_1, x_2, x_3) = (4 + 3s, -5 - 5s, s)$, pour s un réel.

Résumé

- Exemple 1
- Définition de la méthode de Gauss-Jordan
- Proposition
- Exemple 2
- Définition des variables de base et des variables libres
- Exemple 3

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Karima Amoura
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin
samuel.bernard@collanaud.qc.ca
hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC