Méthode de Gauss

Solution unique

Karima Amoura
Chargée de cours
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
amourak@dms.umontreal.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges
Financé à partir du budget d’intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 9 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_{21}(-1) \\ (L_2 \to L_2 - L_1) \\ L_{31}(-1) \\ (L_3 \to L_3 - L_1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array}\right) \begin{array}{c} L_{32}(-2) \\ (L_3 \to L_3 - 2L_2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array}\right)$$

Définition

Méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer la matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée.

Proposition

Solutions d’un système d’équations linéaires

Un système d’équations linéaires peut avoir :

1. une solution unique;
2. une infinité de solutions;
3. aucune solution.

Exemple 2

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6 \\ 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ 1x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 28 \end{cases}$$

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 9 & 28 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$$

(2)

Le système (1) admet comme unique solution $(x_1, x_2, x_3) = (1,3,2)$.

Exemple 3

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array}\right)$$

Exemple 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array}\right)$$

$$L_{21}(-5/3)\left(L_2 \to L_2 - \frac{5}{3}L_1\right)$$

$$L_{31}(-1) \quad (L_3 \to L_3 - L_1)$$

$$L_{41}(2)\ (L_4 \to L_4 + 2L_1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right)$$

$$L_2(-3)$$

$$(L_2 \to -3L_2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right)$$

$$L_{32}(1)$$

$$(L_3 \to L_3 + L_2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right)$$

Exemple 3

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30 \end{cases}$$

(1)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -15 \\ x_2 - 11x_3 = -75 \\ -7x_3 = -49 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(2)

Le système (1) admet comme unique solution $(x_1, x_2, x_3) = (-4,2,7)$.

Résumé

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Karima Amoura

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC