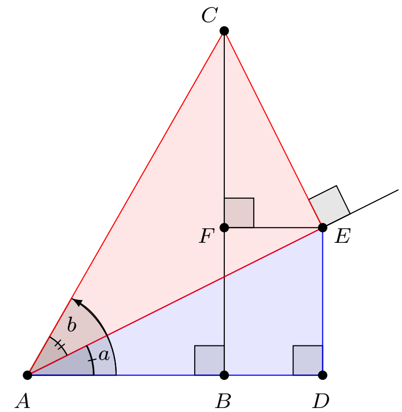
Montrons que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

<u>Preuve</u> :
Nous savons que le sinus d'un angle est égal au rapport $\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ des côtés d'un triangle rectangle. Par conséquent, en considérant le triangle rectangle ABC de la figure ci-contre, on obtient

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \\ &= \frac{\overline{BF}+\overline{FC}}{\overline{AC}} \\ &= \frac{\overline{DE}+\overline{FC}}{\overline{AC}} \quad \text{; car la mesure des côtés BF et DE est la même} \\ &= \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{FC}}{\overline{AC}} \qquad (1) \end{aligned}$$



Multiplions chacun des rapports de l'équation (1) par une fraction égale à 1, soit $\frac{\overline{AE}}{\overline{AE}}$ et $\frac{\overline{CE}}{\overline{CE}}$, pour ne pas modifier l'égalité.

(2) $$\sin(a+b) = \frac{\overline{DE}}{\overline{\boldsymbol{AE}}} \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{AE}}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{FC}}{\overline{\boldsymbol{CE}}} \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{CE}}}{\overline{AC}}$$

Cette astuce nous est très utile, car dans l'équation (2), nous avons maintenant des rapports de côtés du triangle rectangle ADE en bleu, du triangle rectangle AEC en rouge, et du triangle rectangle CFE.

Ainsi, nous pouvons utiliser les définitions des fonctions sinus et cosinus en termes de rapports trigonométriques de triangles rectangles.

On a que

(3) $\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \sin(a)$ Selon le ΔADE, $\sin(a) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

(4) $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \cos(b)$ Selon le ΔAEC, $\cos(b) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

(5) $\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \sin(b)$ Selon le ΔAEC, $\sin(b) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

Afin de trouver la valeur du rapport $\frac{\overline{FC}}{\overline{CE}}$, il faut trouver les angles du triangle rectangle CFE.

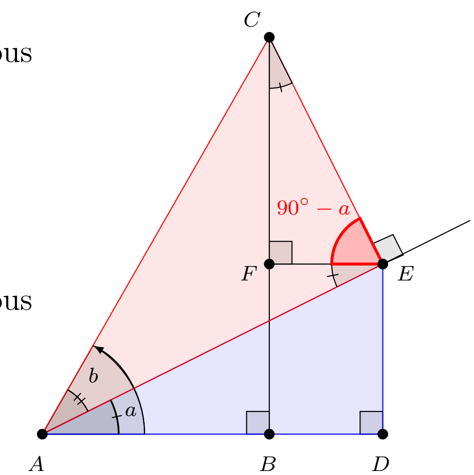
- Nous savons que l'angle $\angle CEA = 90°$, car ΔAEC est un triangle rectangle.
- Nous savons aussi que, comme les deux côtés AD et FE sont parallèles, alors l'angle a et l'angle $\angle FEA$ sont alternes-internes, et donc égaux. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\angle CEA &= \angle CEF + \angle FEA = 90° \\ \Rightarrow \angle CEF &= 90° - \underbrace{\angle FEA}_{a} = 90° - a\end{aligned}$$

- L'angle $\angle CEF$ est marqué en rouge dans la figure ci-dessous. Il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur du troisième angle, $\angle FCE$, dans le ΔCFE :

$$\begin{aligned}90° + (90° - a) + \angle FCE &= 180° && \text{; la somme des angles d'un triangle est de } 180° \\ 180° - a + \angle FCE &= 180° \\ \angle FCE &= \cancel{180°} - \cancel{180°} + a \\ \angle FCE &= a\end{aligned}$$

En complétant la figure avec cette nouvelle information, nous sommes en mesure de trouver la valeur du rapport $\frac{\overline{FC}}{\overline{CE}}$,



$$(6) \qquad \frac{\overline{FC}}{\overline{CE}} = \cos(a) \qquad \text{Selon le } \Delta CFE,\ \cos(a) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

En combinant les résultats des équations (3), (4), (5) et (6), nous démontrons notre formule.

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{FC}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} && \text{voir (2)} \\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) && \text{voir (3), (4), (5), (6)}\end{aligned}$$