Convergence de séries de puissances

Critère généralisé de D’Alembert

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte : convergence d'une série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

- Critère des séries géométriques
- Critère généralisé de D'Alembert
- Critère généralisé de Cauchy

Critère généralisé de D'Alembert

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ où $u_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Évaluer $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

Remarque
Pour une série géométrique, $L = |r|$.

- Si $L < 1$, alors la série **converge.**
- Si $L > 1$, alors la série **diverge.**
- Si $L = 1$, alors **on ne peut rien conclure.**

Exemple 1

Trouver l'intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

Ici, le centre **c** est 0.

0. Énoncer le critère utilisé et trouver le centre $\boldsymbol{c}$ de l'intervalle de convergence.

1. Pour $x \neq \boldsymbol{c}$, simplifier l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!}$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Exemple 1

2. Évaluer $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

Propriétés de la valeur absolue

$$|AB| = |A||B|$$

$$\left|\frac{A}{C}\right| = \frac{|A|}{|C|}$$

où $A, B, C \in \mathbb{R}, C \neq 0$

3. Trouver les valeurs de x pour lesquelles $L < 1$.

4. Faire l'étude aux bornes.

5. Conclure $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Exemple 2

Trouver l'intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n+1}$$

Ici, le centre est **1/2**.

1/2

0. Énoncer le critère utilisé et trouver le centre $\boldsymbol{c}$ de l'intervalle de convergence.

1. Pour $x \neq \boldsymbol{c}$, simplifier l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple 2

2. Évaluer $L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.

Exemple 2

3. Trouver les valeurs de x pour lesquelles $L < 1$.

À retenir :
$|A| < 1 \Leftrightarrow -1 < A < 1$

La série est **convergente** si $L < 1$

$$L < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Le test est **non concluant** si

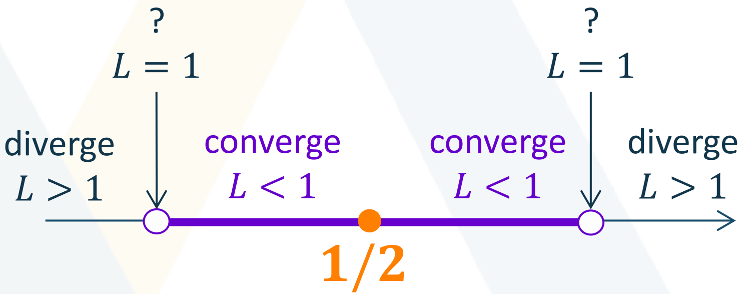
$$L = 1 \Leftrightarrow |2x - 1| = 1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) = -1 \quad \text{ou} \quad (2x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

La série est **divergente** si $L > 1$,

c'est-à-dire partout ailleurs.



Exemple 2

On doit utiliser un autre critère que celui de D'Alembert.

4. Étudier les séries numériques aux bornes de l'intervalle $(L = 1)$.

5. Conclure

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n+1}$$

Résumé

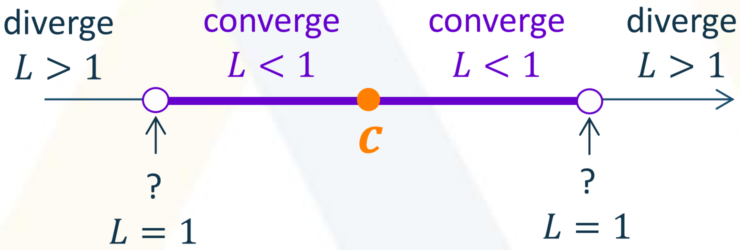
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

Étude de la convergence d'une série de puissances avec le critère généralisé de D'Alembert.

1. Pour $x \neq c$, simplifier l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Évaluer $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

3. Trouver les valeurs de x pour lesquelles $L < 1$.



4. Étudier les séries aux bornes de l'intervalle $(L = 1)$.

5. Conclure

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC