Séries de puissances géométriques

Convergence et somme

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte : convergence d’une série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

- Critère des séries géométriques
- Critère généralisé de D’Alembert
- Critère généralisé de Cauchy

Critère des séries géométriques

Une série est dite **géométrique** si ses termes peuvent s'écrire sous la forme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{ar^{n-1}}_{u_n} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ et } r \in \mathbb{R}$$

$\cdot r \quad \cdot r \quad \cdot r$

$$u_{n+1} = ru_n$$

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

r est la raison

a est le premier terme de la série

La série converge $\Leftrightarrow \; |r| < 1.$

Lorsqu'elle converge, la somme de la série est $\dfrac{a}{1-r}$.

Exemple 1

Trouver l'intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une série de puissance géométrique.

2. Identifier a et r.

Remarque
Dans une série de puissances géométrique, r dépend de la variable x, mais ne dépend pas de l'indice de sommation n.

Exemple 1

Trouver l’intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

3. Trouver l’intervalle de convergence en isolant la variable x dans $|r| < 1$, ce qui est équivalent à isoler la variable x dans $-1 < r < 1$.

4. Trouver la fonction vers laquelle la série converge sur son intervalle de convergence.

5. Conclure.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Exemple 2

Trouver l'intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^{k+1}} = \frac{(x-2)}{3^2} + \frac{(x-2)^2}{3^3} + \frac{(x-2)^3}{3^4} + \cdots$$

Exemple 2

Trouver l'intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^{k+1}}$$

Exemple 2

Trouver l'intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^{k+1}}$$

Exemple 3

Trouver l'intervalle de convergence de la série suivante et sa somme, si possible.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

Truc pour repérer une série géométrique

L'indice de sommation est

uniquement à l'exposant,

et de degré 1.

Résumé

- Étudier la convergence d'une série de puissances consiste à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la série converge.
- Si la série de puissances est géométrique, on identifie le premier terme a et la raison r. Remarque : a et r peuvent dépendre de la variable x.
- La série converge $\Leftrightarrow |r| < 1 \ \Leftrightarrow -1 < r < 1$.
- Sur l'intervalle de convergence trouvé, la série converge vers la fonction $f(x) = \frac{a}{1-r}$.

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Anik Soulière
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC