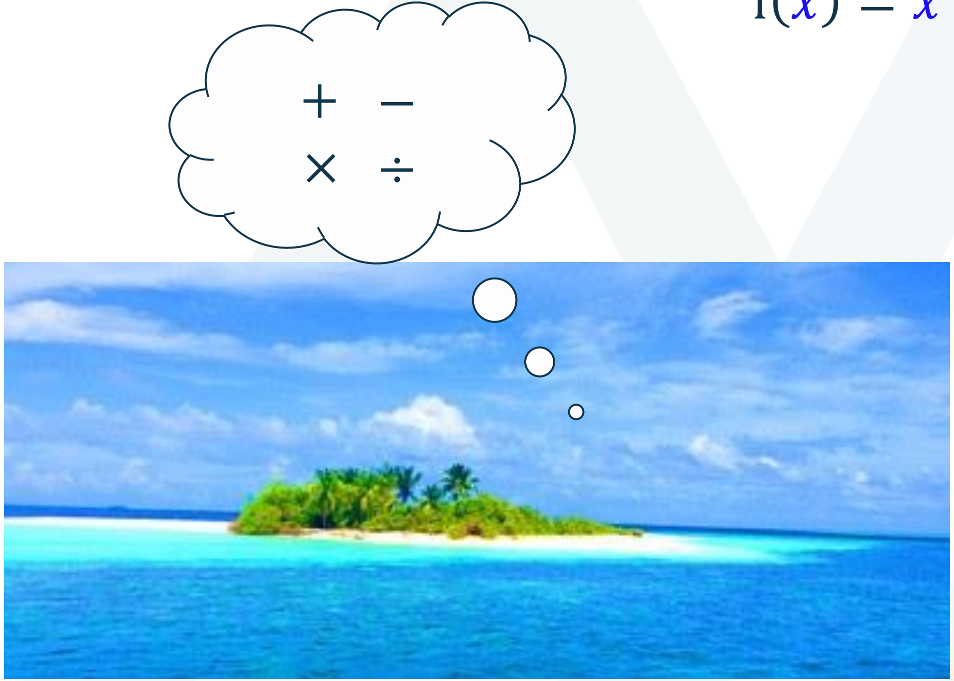
Séries de Taylor et séries de puissances

Vue d'ensemble

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte



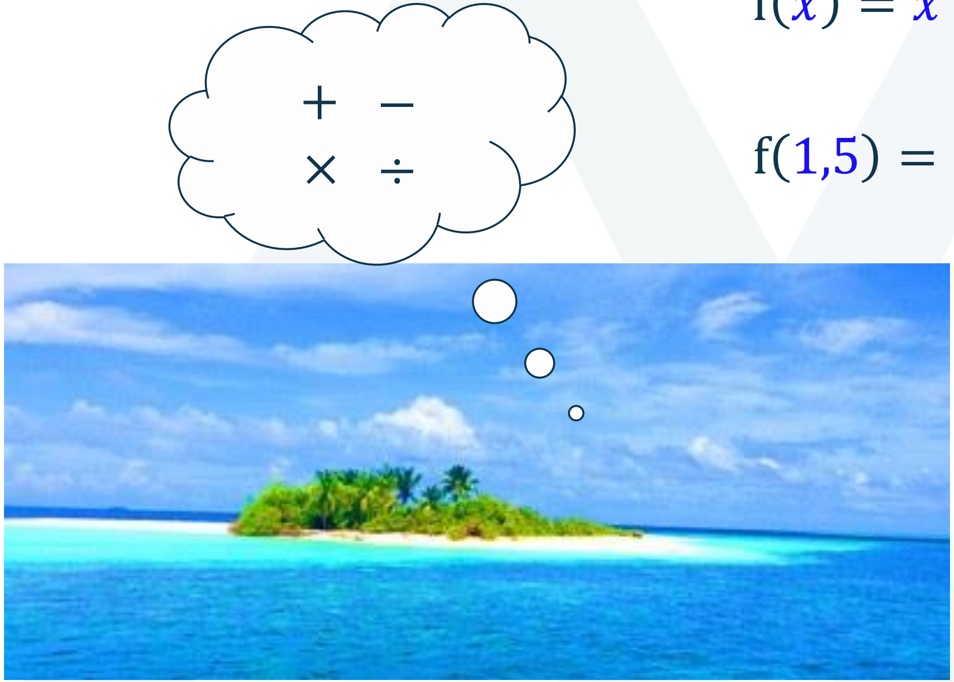
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!}x^5$$

$x \cdot x \cdot x$

$3 \cdot 2 \cdot 1$

un polynôme $\begin{cases} + \\ - \\ \times \\ \div \end{cases}$

Mise en contexte



$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!}x^5$$

un polynôme $\begin{cases} + \\ - \\ \times \\ \div \end{cases}$

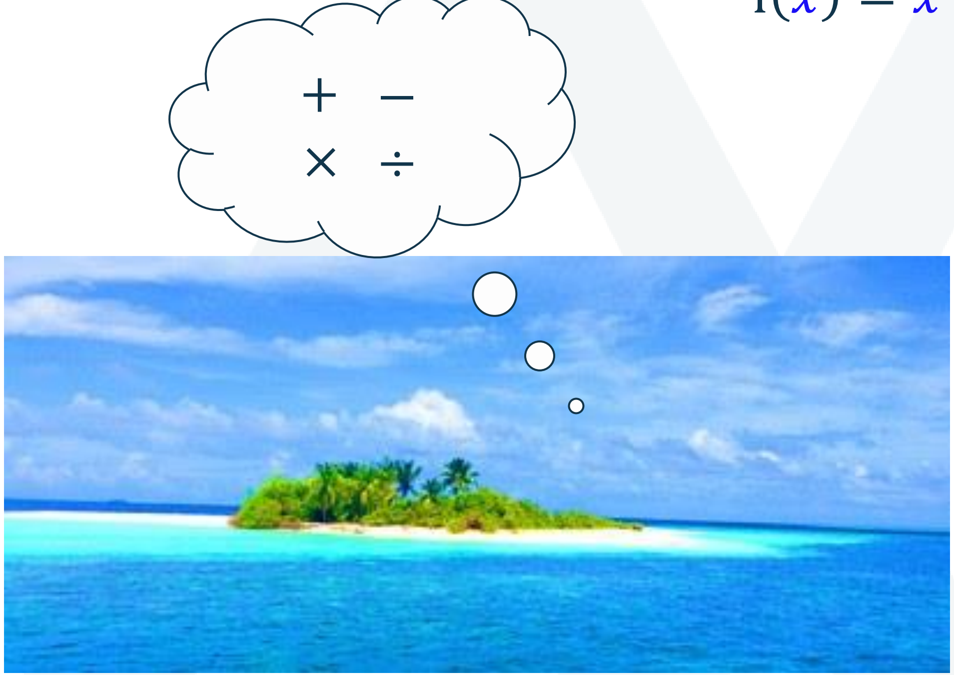
$$f(1{,}5) = (1{,}5) - \frac{(1{,}5)^3}{3!} + \frac{1}{5!}(1{,}5)^5$$

Mise en contexte

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!}x^5$$

un polynôme $\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \times \\ \div \end{array} \right.$

- Facile à dériver
- Facile à intégrer
- Sa dérivée et son intégrale sont de nouveaux polynômes



Mise en contexte

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!}x^5$$

un polynôme $\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \times \\ \div \end{array} \right.$

$+ \quad -$

$\times \quad \div$

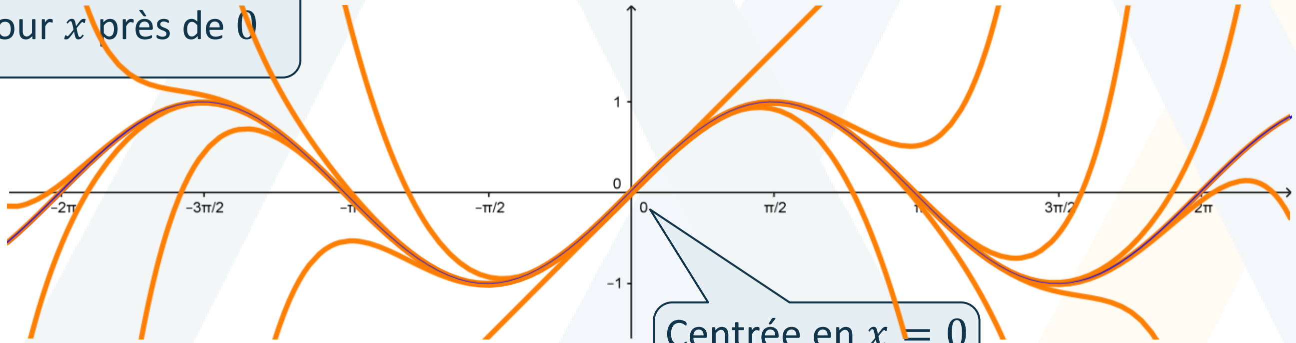
$\sin(0,5)$?

$\ln(2)$?

Polynômes à la rescousse!

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

Pour x près de 0



Centrée en $x = 0$
$\sin(0) = 0$

Polynômes à la rescousse!

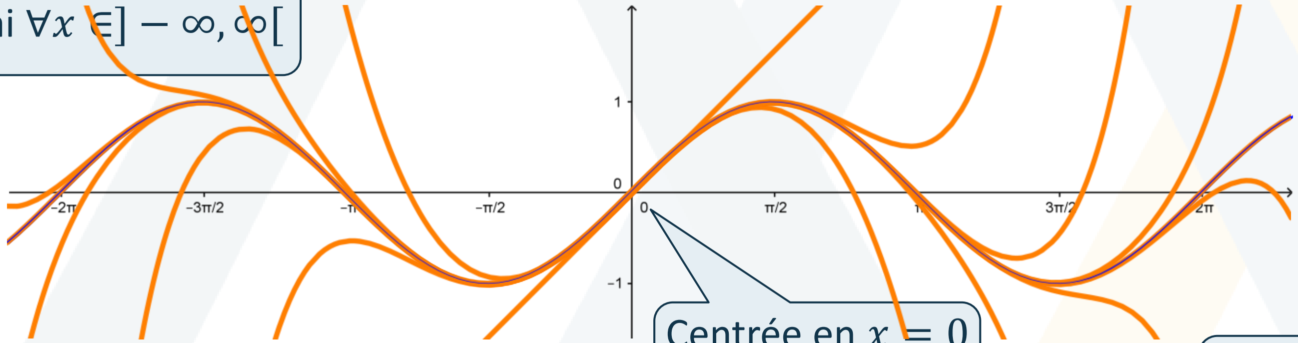
à l'infini

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

« somme infinie de polynômes »

Série de puissances entières de x.

Vrai $\forall x \in]-\infty, \infty[$



Centrée en $x = 0$
$\sin(0) = 0$

Cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Aussi appelée série de MacLaurin

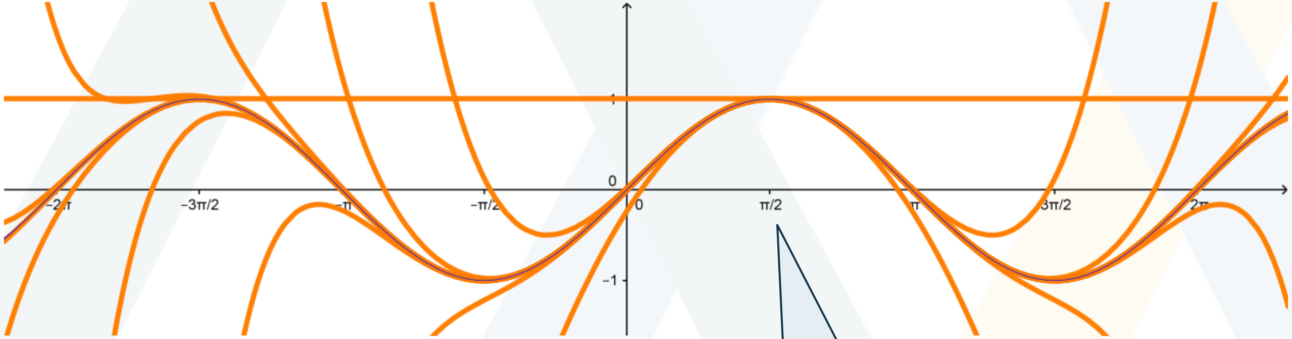
Comment trouver les termes de cette série?

Formule de développement en **série de Taylor** autour de la valeur $x = 0$.

Développer une approximation autour d'une autre valeur

$$\sin x \approx 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/2)^4}{4!} - \frac{(x-\pi/2)^6}{6!}$$

Pour x près de $\pi/2$

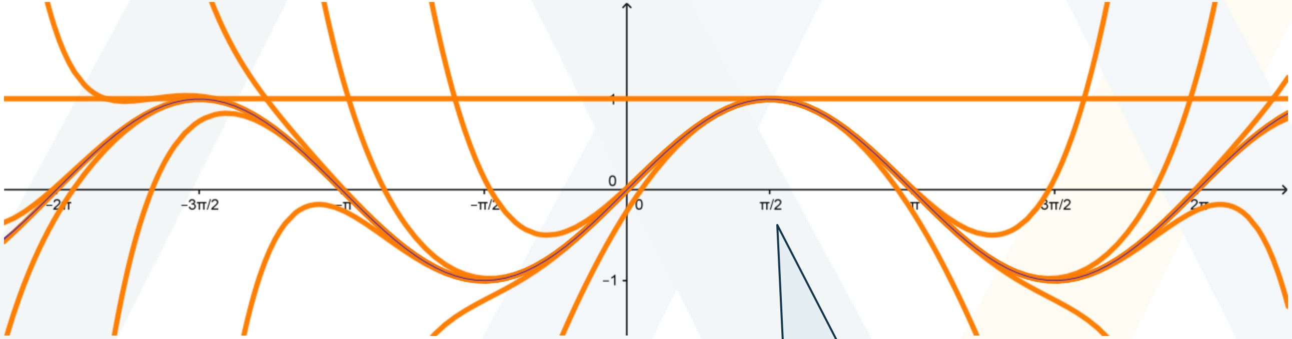


Centrée en $x = \pi/2$
$\sin(\pi/2) = 1$

Développer une approximation autour d'une autre valeur

$$\sin x \;=\; 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/2)^4}{4!} - \frac{(x-\pi/2)^6}{6!} + \cdots$$

Vrai $\forall x \in]-\infty, \infty[$



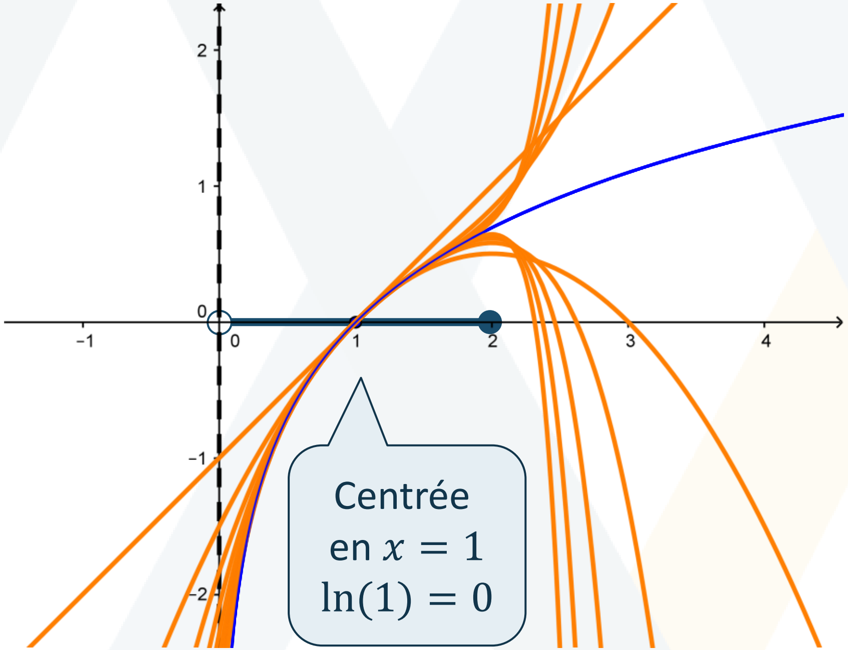
Centrée en $x = \pi/2$

$\sin(\pi/2) = 1$

Converge toujours sur tous les réels?

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

Pour x près de 1

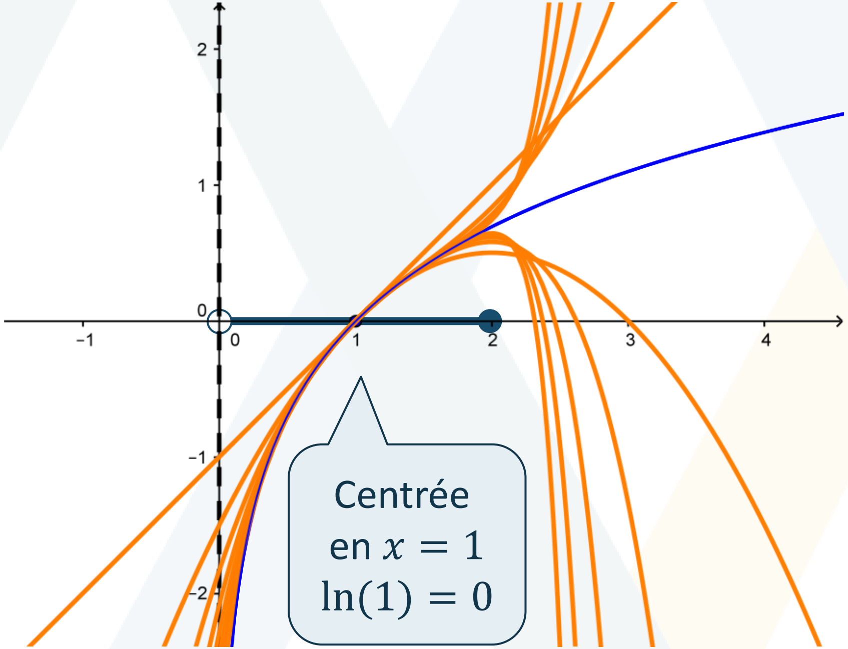


Centrée
en $x = 1$
$\ln(1) = 0$

Converge toujours sur tous les réels?

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots$$

Vrai $\forall x \in \left]0, 2\right]$



Centrée en $x = 1$
$\ln(1) = 0$

Quelques applications des séries de Taylor

Approximer numériquement la valeur d’une fonction transcendante.

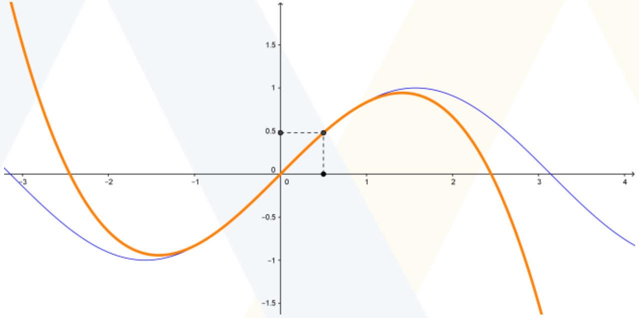
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

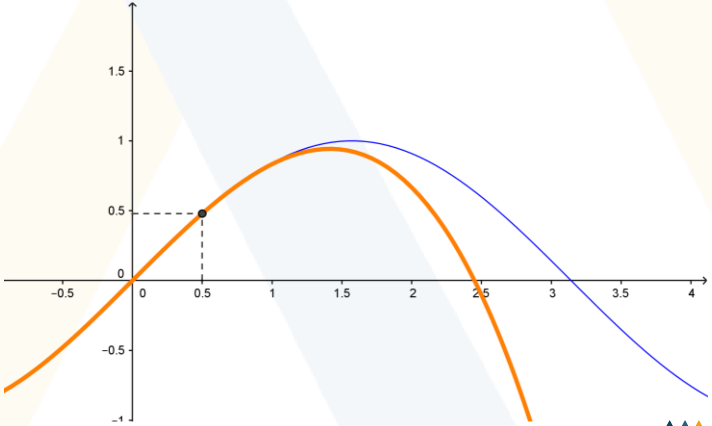
$$\sin(0{,}5) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}5^3}{6}$$

$$\approx \mathbf{0{,}4791}$$

$$= 0{,}479426\ \ldots$$

$$\approx$$





Quelques applications des séries de Taylor

Trouver la valeur de l'intégrale définie d'une fonction n'ayant aucune primitive connue.

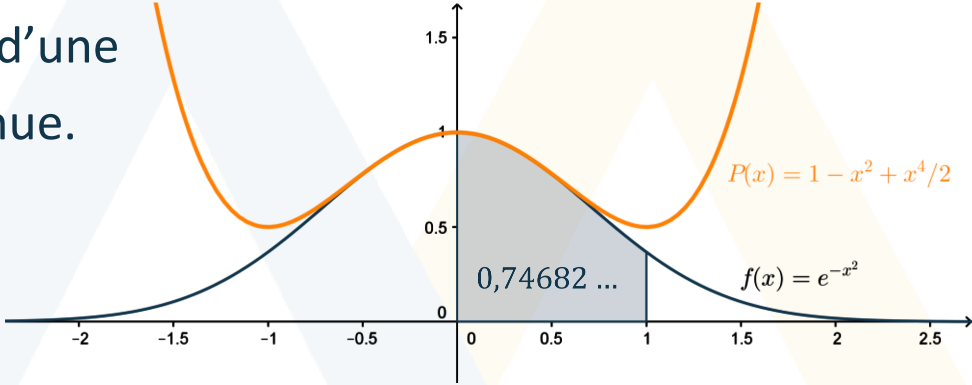
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \cdots\right) dx$$

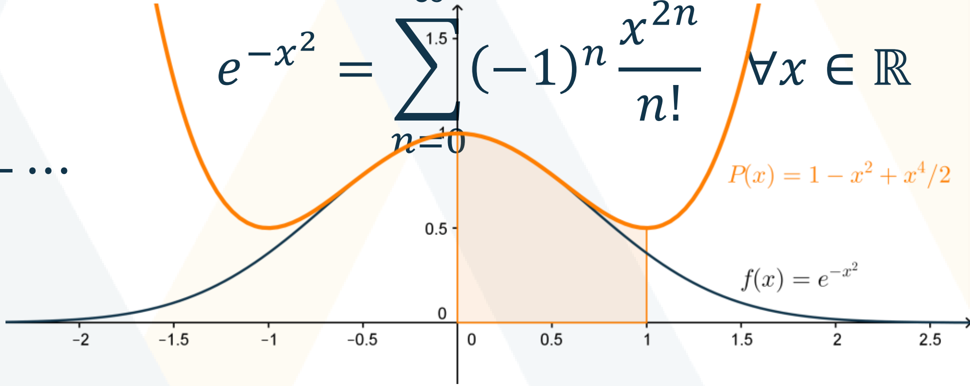
$$\approx \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 -x^2\,dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!}\,dx + \cdots$$

$$\approx x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{2!5}\Big|_0^1$$

$$\approx 0,7\overline{6}$$

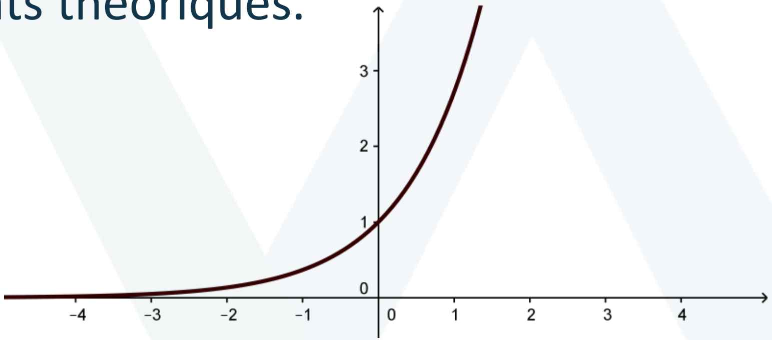


$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



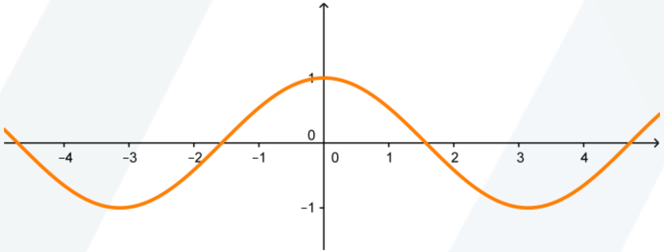
Quelques applications des séries de Taylor

Démontrer des résultats théoriques.

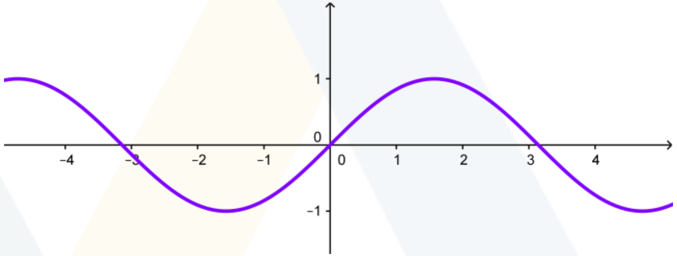


$$y = e^{x}$$

$$i = \sqrt{-1}$$



$$y = \cos\theta$$



$$y = \sin\theta$$

Quelques applications des séries de Taylor

Démontrer des résultats théoriques.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Formule d'Euler

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \cdots \quad i^2 = -1$$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{-\theta^2}{2!} + \frac{-i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)}_{\sin\theta} \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Résumé

Plusieurs fonctions transcendantes que vous connaissez

$$\sin x\,,\cos x\,,\ln x\,,e^{x},\log_b x\,,\sin(x^2)\,,\ldots$$

peuvent s'exprimer comme une somme infinie de polynômes appelée série de puissances.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Vrai $\forall x \in]-\infty, \infty[$

$+ \quad -$

$\times \quad \div$

Développement en série de Taylor autour de $x = c$.

Converge $\forall x \in \,]c - R, c + R[$

Résumé

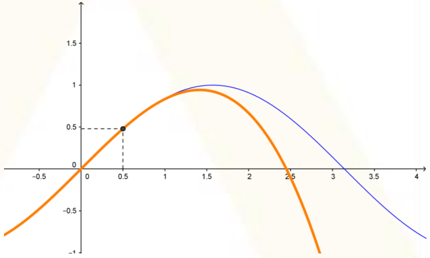
Quelques applications des séries de Taylor :

1. approximer numériquement une fonction près du centre de convergence;

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

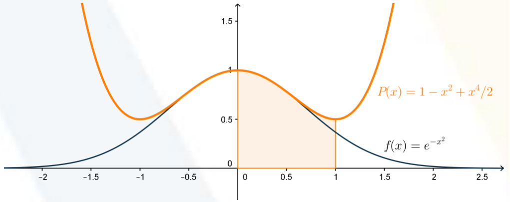
$$\sin(0{,}5) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}5^3}{6}$$

$$\approx 0{,}4791$$



2. évaluer des intégrales définies dont la primitive est difficile à trouver;

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 -x^2\,dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!}\,dx$$



3. démontrer des résultats théoriques.

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Conception du contenu

Anik Soulière
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Crédit images

Pixabay

pixabay.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard
CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber
Université de Montréal

Mathéma-TIC