Qu’est-ce que la convergence d’une série de puissances?

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Forme générale d'une série de puissances

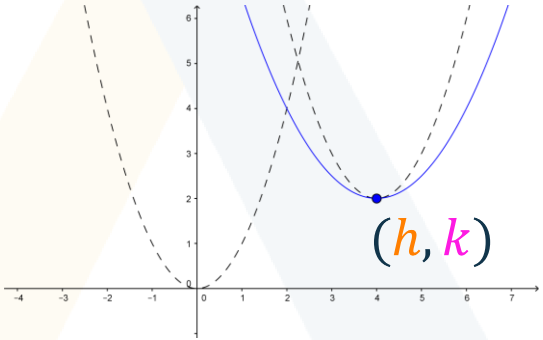
Forme générale d'une série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

« forme canonique d'un polynôme ayant une infinité de termes »

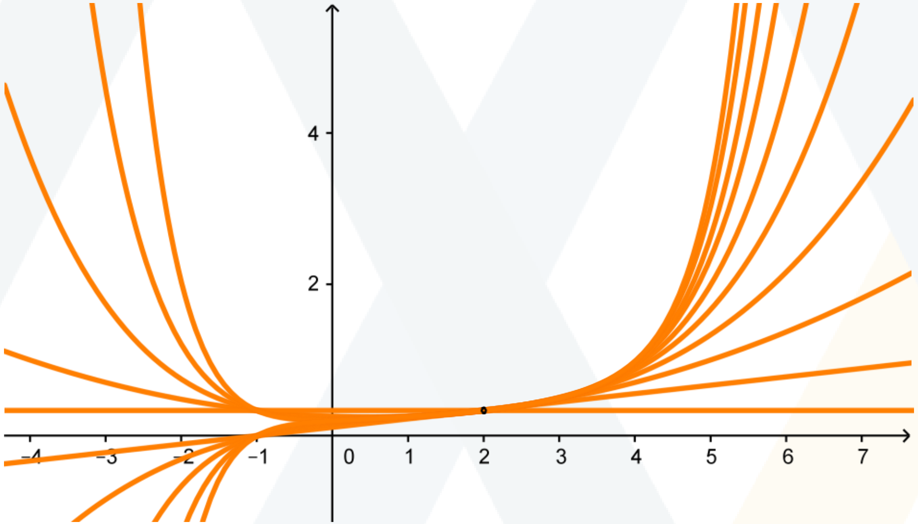
Forme canonique d'un polynôme de degré 2

$$y = a(x-h)^2 + k$$



Visualisation de la convergence d'une série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{(x-2)}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} - \frac{(x-2)^3}{81} + \frac{(x-2)^4}{270} + \cdots$$



On peut visualiser la suite de polynômes qui constituent des sommes partielles.

Pour quelles valeurs de x cette suite de polynômes semble se stabiliser vers des points fixés sur le graphique?

Étude de la convergence pour $x = 2$

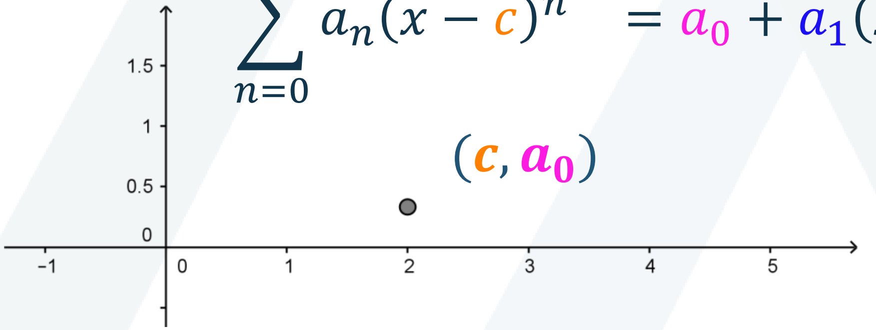
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{(x-2)}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} + \frac{(x-2)^3}{81} + \cdots$$

Si $x = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{(2-2)}{9} + \frac{(2-2)^2}{27} + \frac{(2-2)^3}{81} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3} + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \cdots \qquad = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$



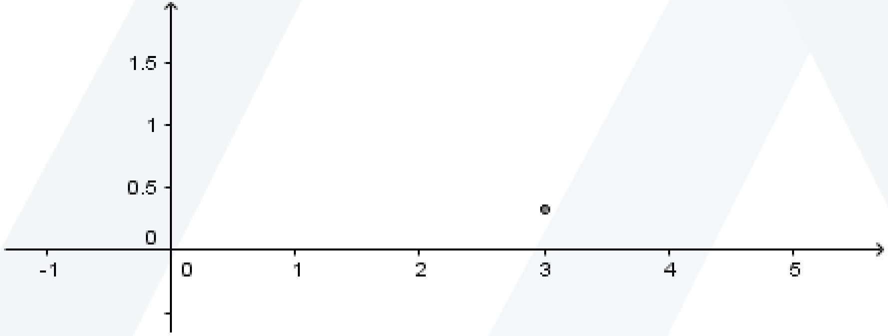
Étude de la convergence pour $x = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{(x-2)}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} + \frac{(x-2)^3}{81} + \cdots$$

Si $x = 3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{(3-2)}{9} + \frac{(3-2)^2}{27} + \frac{(3-2)^3}{81} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots \to \frac{1}{2}$$



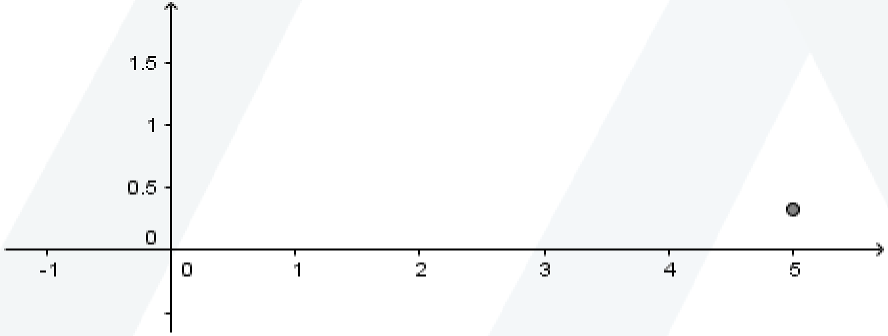
Étude de la convergence pour $x = 5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{(x-2)}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} + \frac{(x-2)^3}{81} + \cdots$$

Si $x = 5$:

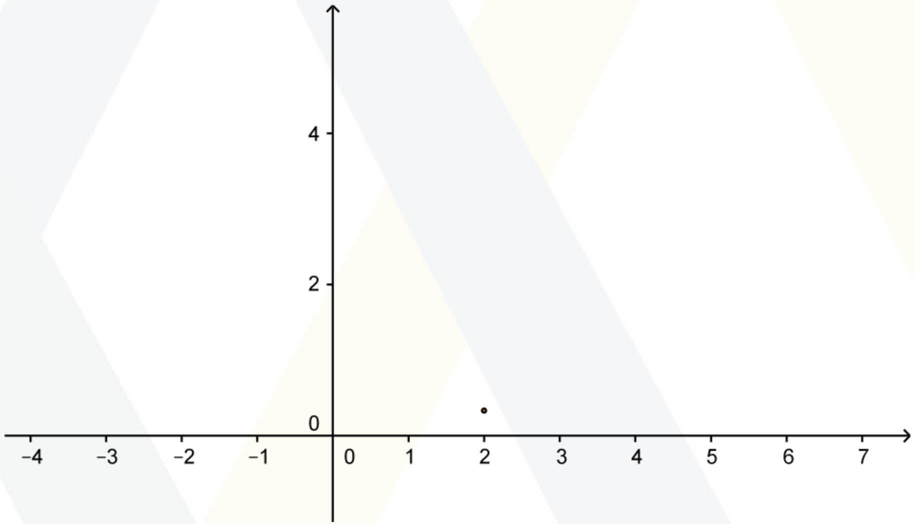
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{(5-2)}{9} + \frac{(5-2)^2}{27} + \frac{(5-2)^3}{81} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots \rightarrow \infty$$



Intervalle de convergence d'une série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{(x-2)}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} - \frac{(x-2)^3}{81} + \frac{(x-2)^4}{270} + \cdots$$



Quelques critères de convergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

- Critère des séries géométriques

Avantage : permet de calculer la fonction vers laquelle la série converge sur l'intervalle de convergence.

Quelques critères de convergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

- Critère des séries géométriques
- Critère généralisé de D'Alembert

Avantage : permet de trouver l'intervalle de convergence de toutes les séries de Taylor (sans les bornes).

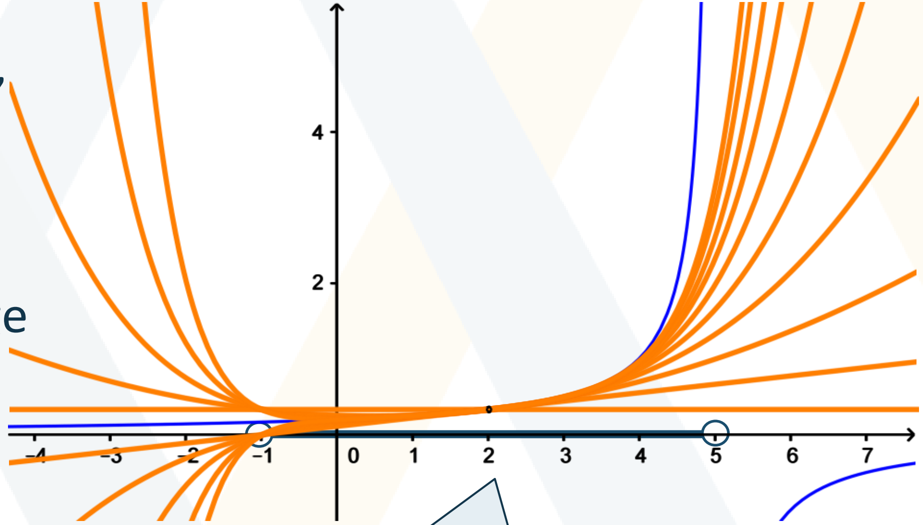
Intervalle de convergence d'une série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{(x-2)}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} - \frac{(x-2)^3}{81} + \frac{(x-2)^4}{270} + \cdots$$

Par le critère des séries géométriques, on peut démontrer que:

1. la série converge $\forall x \in]-1,5[$;
2. sur cet intervalle, la série converge vers la fonction

$$f(x) = \frac{1}{5-x}$$



Centré en $x = 2$

Le centre de l’intervalle de convergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \boldsymbol{c})^n$$

Centre de l’intervalle de convergence

Forme générale d’une série de puissances

Les séries de puissances convergent toujours en la valeur $x = \boldsymbol{c}$.

Si $x = \boldsymbol{c}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\boldsymbol{c} - c)^n &= a_0 + a_1\cancel{(\boldsymbol{c} - c)} + a_2\cancel{(\boldsymbol{c} - c)}^2 + a_3\cancel{(\boldsymbol{c} - c)}^3 + \cdots \\ &= a_0\end{aligned}$$

Intervalle et rayon de convergence

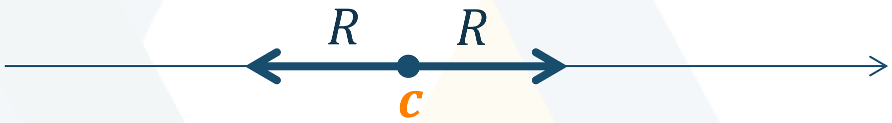
On peut démontrer que la série converge toujours sur un intervalle symétrique autour du centre $x = \boldsymbol{c}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \boldsymbol{c})^n \quad = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \cdots$$

Centre de l'intervalle de convergence

converge

$\forall x \in \left]\boldsymbol{c} - R, \boldsymbol{c} + R\right[$



L'étendue de l'intervalle de part et autre de $x = \boldsymbol{c}$ est appelé **rayon de convergence** « R ».

Ce rayon peut être infini lorsque la série converge pour tout x, ou même 0 si elle ne converge qu'en son centre.

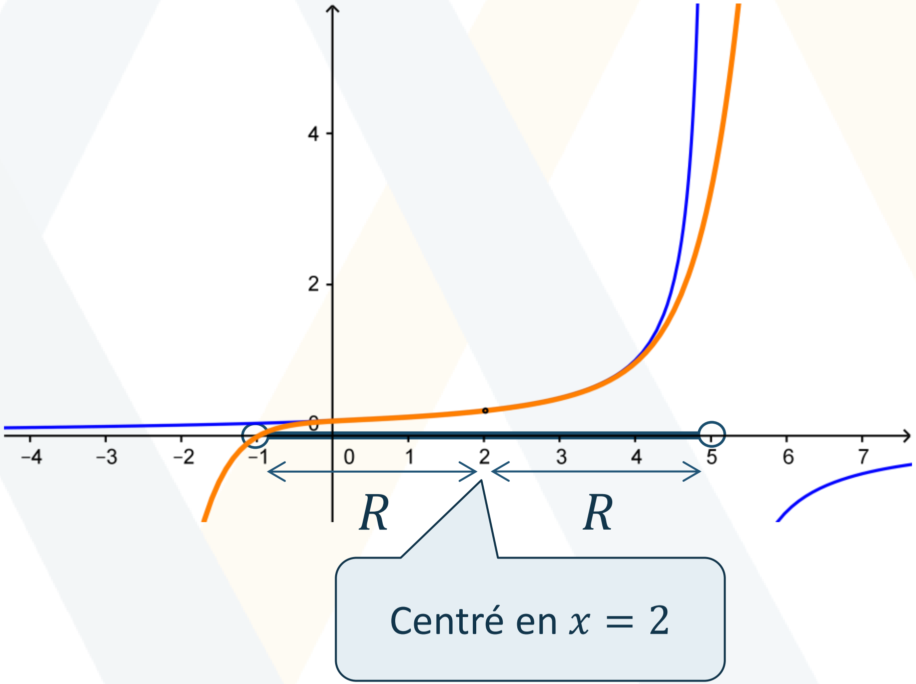
Retour à l’exemple de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\mathbf{2})^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{(x-2)}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} - \frac{(x-2)^3}{81} + \frac{(x-2)^4}{270} + \cdots$$

Le centre de l’intervalle de convergence est **2**.

La série converge sur l’intervalle $]-1,5[$ qui est symétrique autour du centre 2.

Le rayon de convergence R est 3.



Résumé

Étudier la convergence d'une série de puissances consiste à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la série converge, c'est-à-dire que la limite des sommes partielles tend vers une valeur finie.

Résumé

Les séries de puissances convergent toujours à l'intérieur d'un intervalle centré en la valeur $x = c$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

La valeur de c est celle qui annule tous les termes de la série, sauf possiblement le premier.

Résumé

Plusieurs critères de convergence peuvent être utilisés pour trouver l'intervalle de convergence d'une série de puissances.

Le critère des séries géométriques permet même de trouver la fonction vers laquelle la série converge.

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC