

Intégration par substitution trigonométrique

Deux exemples non standards

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-4x+5)^3}} dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+9)^2} dx$$

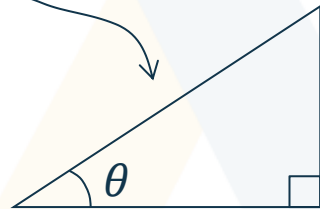
L'intégrale contient un radical de la forme:

(avec $A > 0$, $B > 0$)



Substitution trigonométrique

$$\sqrt{Ax^2 + B} \quad \sqrt{Ax^2 - B} \quad \sqrt{B - Ax^2}$$



Exemple 1 : absence de racine carrée, forme $Ax^2 + B$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$Ax^2 + B$

$$= \int \frac{1}{\left(\underbrace{(x^2 + 9)}_{>0}\right)^2} dx$$
$$= \int \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 9})^4} dx$$

À terminer en
exercice!

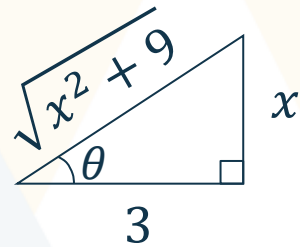
$$\underbrace{(\sqrt{x^2 + 9})^2}_{>0} = x^2 + 9$$

$$\frac{x}{3} = \tan \theta$$

$$x = 3 \tan \theta$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} = \sec \theta$$



Réponse: $\frac{1}{54} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18(x^2 + 9)} + C$

Exemple 2 : puissance 3/2 et complétion du carré

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}} dx \\ &= \int \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5})^3} dx \\ & \quad \Delta = b^2 - 4ac \\ & \quad = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0 \\ &= \int \frac{1}{(\sqrt{(x-2)^2 + 1})^3} dx \end{aligned}$$

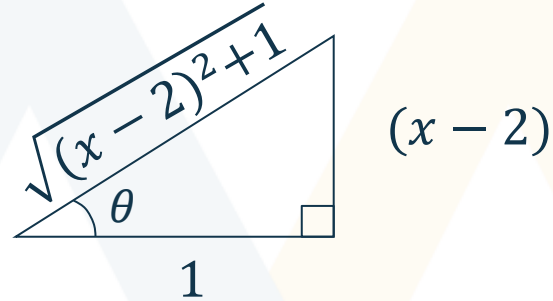
$$\begin{aligned} \sqrt{\underbrace{(expression)^3}_{>0}} &= (expression)^{3/2} \\ &= (\sqrt{expression})^3 \end{aligned}$$

Complétion du carré

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 \\ &= \underbrace{(x-2)^2}_{\text{complétion}} + 1 \end{aligned}$$

Exemple 2 : puissance 3/2 et complétion du carré

$$= \int \frac{1}{\left(\sqrt{(x-2)^2+1}\right)^3} dx$$



À terminer en
exercice!

$$\frac{x-2}{1} = \tan \theta$$

$$x = \tan \theta + 2$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{1} = \sec \theta$$

Réponse:
$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C$$

Résumé

$$\int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}} dx$$

But : se ramener à la forme $\sqrt{Ax^2 + B}$ où la substitution trigonométrique est possible.

$$\left(\underbrace{\sqrt{\text{expression}}}_{>0} \right)^2$$

$$= (\text{expression})$$

$$\sqrt{\left(\underbrace{\text{expression}}_{>0} \right)^3}$$

$$= \left(\underbrace{\sqrt{\text{expression}}}_{>0} \right)^3$$

Complétion du carré
pour se ramener à une forme
 $(Ax^2 + B)$.

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca