Intégration par substitution trigonométrique

Construire un triangle de référence

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

1. Formule de base?

Non ↓

2. Simplification?

Non ↓

3. Changement de variable?

Non ↓

4. Intégration par parties?

Non ↓

?

Mise en contexte

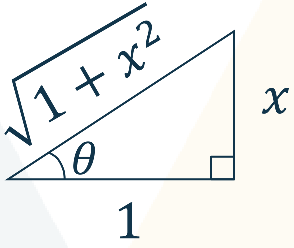
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

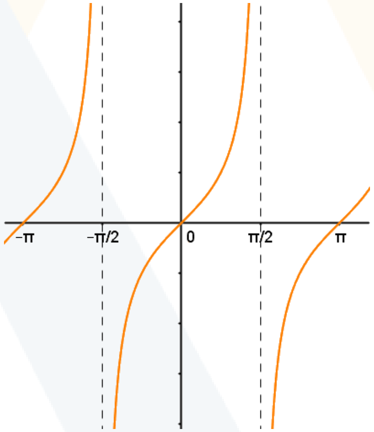
Nouvelle stratégie:

faire un changement de variable
où x est associé à une fonction trigonométrique.

$$x = \tan\theta \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$





Intention :

se débarrasser du $\sqrt{}$

Exemple 1 : départ avec l’identité

$$\boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$$

$$\int \frac{1}{\underbrace{\boxed{\sqrt{1+x^2}}}_{\sec\theta}} \boxed{dx}$$

$$\begin{cases} x = \tan\theta \\ dx = \sec^2\theta \; d\theta \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

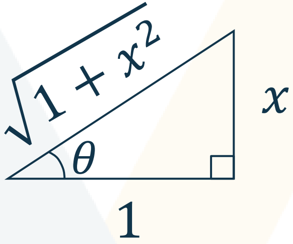
$$\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| = \sec\theta$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\sec}\,\theta} \sec^{\cancel{2}}\theta \, d\theta$$

$$= \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \ln|\tan\theta + \sec\theta| + C$$

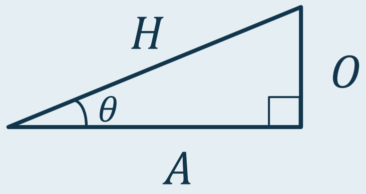
$$= \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$$



$$\frac{x}{1} = \tan\theta = \frac{O}{A}$$

$$\sec\theta = \frac{H}{A} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1}$$

Les rapports trigonométriques



H: hypoténuse
A: côté adjacent à l'angle θ
O: côté opposé à l'angle θ

SOH
CAH
TOA

1. $\sin\theta = \dfrac{O}{H}$
2. $\cos\theta = \dfrac{A}{H}$
3. $\tan\theta = \dfrac{O}{A}$
4. $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{H}{O}$
5. $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{H}{A}$
6. $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{A}{O}$

Exemple 2 : départ avec le triangle

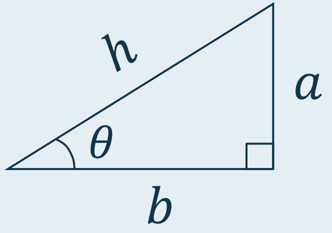
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx$$

$$\frac{\textit{côté «en } x\text{»}}{\textit{côté constant}}$$

$$\frac{\textit{côté du } \sqrt{}}{\textit{côté constant}}$$

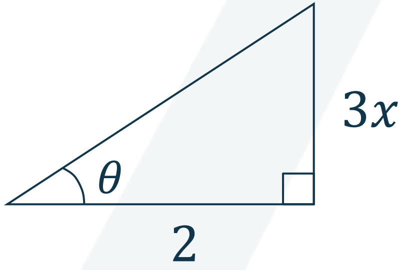
Entraînement intensif sur le triangle

Compléter les côtés manquants à l'aide du théorème de Pythagore. Parfois, plusieurs réponses sont possibles.

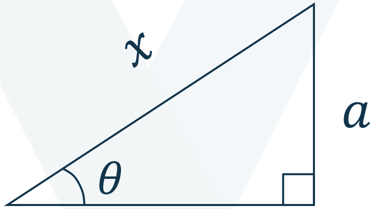


$$h^2 = a^2 + b^2$$

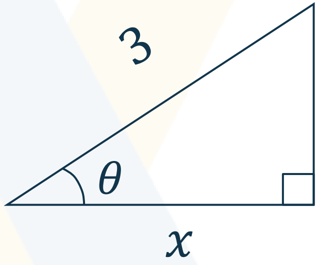
1)



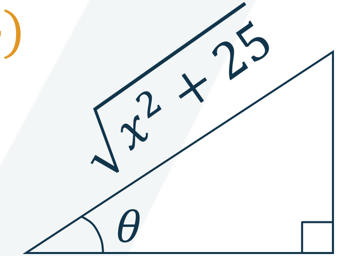
2)



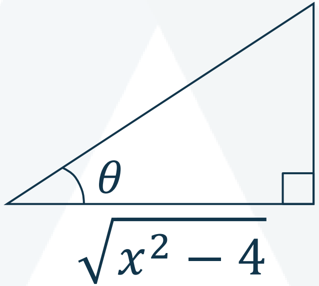
3)



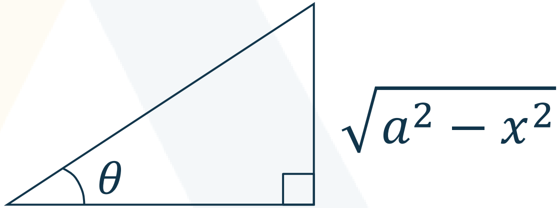
4)



5)



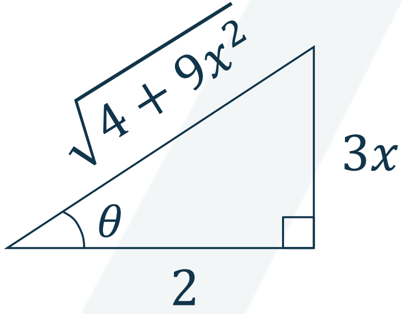
6)



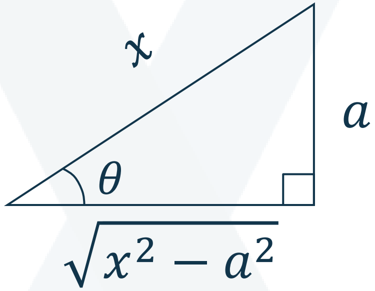
Entraînement intensif sur le triangle : SOLUTIONS

Compléter les côtés manquants à l'aide du théorème de Pythagore. Parfois, plusieurs réponses sont possibles.

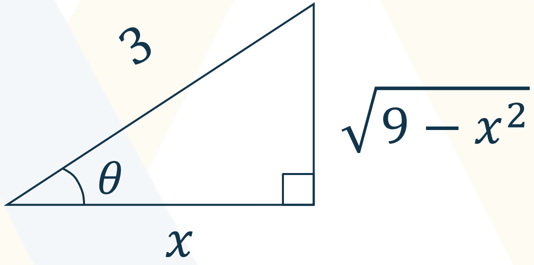
1)



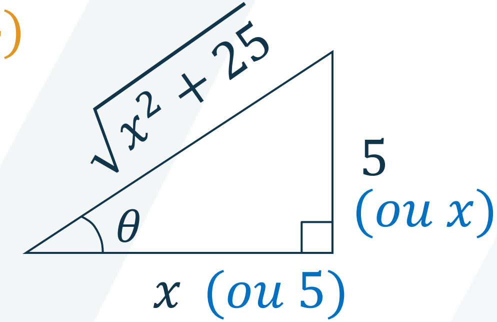
2)



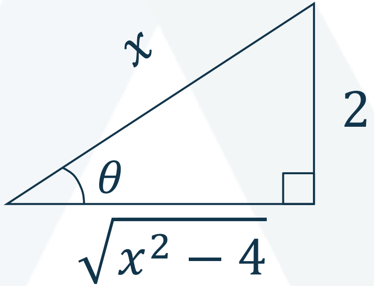
3)



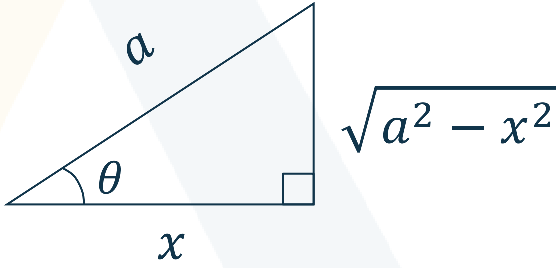
4)



5)



6)



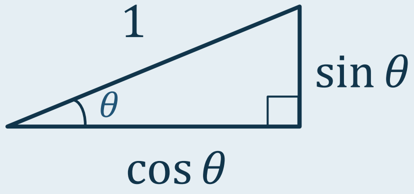
Exemple 3

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

Quelques identités utiles en calcul intégral



Théorème de Pythagore

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
3. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

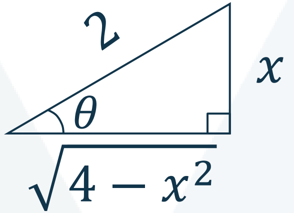
$\div \cos^2\theta$

$\div \sin^2\theta$

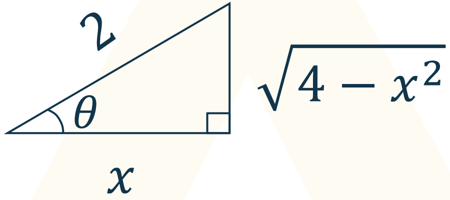
4. $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$
5. $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$
6. $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Remarque : autre possibilité?

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$



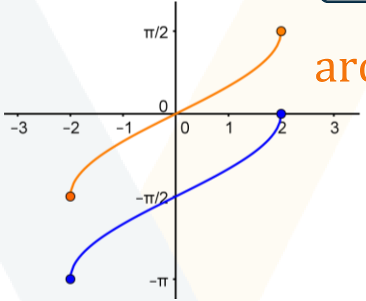
$$\frac{x}{2} = \sin\theta$$



$$\frac{x}{2} = \cos\theta$$

Privilégier $\tan\theta$, $\sin\theta$, $\sec\theta$
plutôt que les « co » :
$\cot\theta$, $\cos\theta$, $\csc\theta$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}\right) + C_1 = 2\left(\underbrace{-\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}_{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \pi/2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}\right) + C_2$$



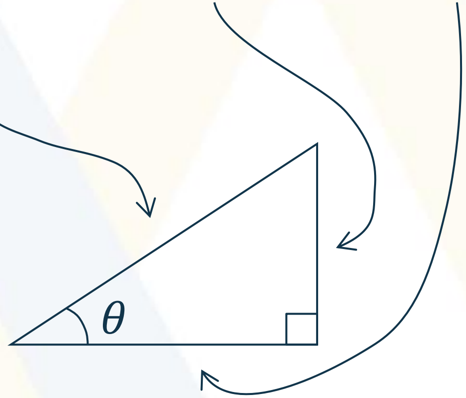
$$C_1 = C_2 - \pi$$

Résumé

L'intégrale contient un radical de la forme:

$$\sqrt{Ax^2+B} \qquad \sqrt{Ax^2-B} \qquad \sqrt{B-Ax^2}$$

(avec $A>0,\ B>0$)



1. Dans un triangle rectangle, placer le radical sur un côté de manière à compléter les autres côtés à l'aide du théorème de Pythagore.
2. Faire le changement de variable:

$$\frac{\text{côté «en } x\text{»}}{\text{côté constant}} = \text{fonction trigo} \quad \Rightarrow \quad x = $$

$$dx = $$

$$\frac{\text{côté du } \sqrt{}}{\text{côté constant}} = \text{fonction trigo}$$

Privilégier $\tan\theta$, $\sin\theta$, $\sec\theta$ plutôt que les « co » : $\cot\theta$, $\cos\theta$, $\csc\theta$.

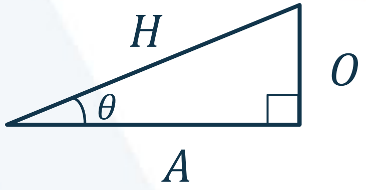
Résumé

3. Dans l'intégrale, remplacer l'expression en x par une expression en θ.

$$\int (expression\ en\ x)\ dx$$
$$= \int (expression\ en\ \theta)\ d\theta$$

4. Effectuer l'intégrale.

5. Exprimer le résultat final en fonction de x à l'aide des rapports trigonométriques dans le triangle de départ.



1. $\sin\theta = O/H$
2. $\cos\theta = A/H$
3. $\tan\theta = O/A$
4. $\csc\theta = H/O$
5. $\sec\theta = H/A$
6. $\cot\theta = A/O$

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Mathéma-TIC

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC