Mathéma-TIC

Intégration de puissances de tangente et sécante

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$ où m et n sont des entiers positifs.

3 cas :

1. L'exposant de sécante est **pair**.
2. L'exposant de tangente est **impair**.
3. Ni l'un ni l'autre
(l'exposant de sécante est impair
et celui de tangente est pair).

Exemples

$$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

$$\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx$$

Les intégrales qu'on sait évaluer

$$\int \sec^2 x \quad dx \qquad = \tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x \quad dx \quad = \sec x + C$$

$$\int \sec x \quad dx \quad = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \tan x \quad dx \quad = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$\int \tan^2 x \quad dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

Exemple 1 : cas où l’exposant de sécante est pair

pair

$$\int \tan^2 x \underbrace{\sec^4 x \, dx}_{\underbrace{\sec^2 x}_{(\tan^2 x + 1)} \; \boxed{\sec^2 x \quad dx}}$$

pair

But : faire un des changements de variable suivants.

$$\begin{cases} u = \tan x \\ du = \sec^2 x \; dx \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x \; dx \end{cases}$$

Enjeux :

A. Avoir le bon du.

B. Transformer le reste en u.

Un outil : l’identité

$$\boxed{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}$$

Exemple 1 : cas où l'exposant de sécante est pair

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$$

$$\boxed{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}$$

Exemple 2 : cas où l'exposant de tangente est impair

impair

$$\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

But : faire un des changements de variable suivants.

$$\begin{cases} u = \tan x \\ du = \sec^2 x \; dx \end{cases}$$

ou $\begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x \; dx \end{cases}$

Enjeux :

A. Avoir le bon du.

B. Transformer le reste en u.

Un outil : l'identité

$$\boxed{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}$$

Exemple 2 : cas où l'exposant de tangente est impair

impair

$$\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

But : faire un des changements de variable suivants.

pair

$$\int \sec^2 x \underbrace{\tan^2 x}_{(\sec^2 x - 1)} \boxed{\tan x \sec x \, dx}$$

$$\begin{cases} u = \tan x \\ du = \sec^2 x \, dx \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x \, dx \end{cases}$$

Enjeux :

A. Avoir le bon du.

B. Transformer le reste en u.

Un outil : l'identité

$$\boxed{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}$$

Exemple 2 : cas où l'exposant de tangente est impair

$$\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

Exemple 3 : autres cas

Impair?

Pair?

Qu'à cela ne tienne!
Je tente un changement de variable.

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \int \underbrace{\tan x}_{\sqrt{\sec^2 x - 1}} \underbrace{\tan x \sec x \, dx}_{du}$$

$$= \int \sqrt{u^2 - 1} \; du$$

$$\begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x \; dx \end{cases}$$

$$\boxed{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}$$

Exemple 3 : autres cas

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx$$

Stratégie

A. Transformer tout en puissances de $\sec x$
à l'aide de l'identité $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$.

B. Utiliser l'intégration par parties pour évaluer chaque intégrale de la forme

$$\int \sec^n \theta \quad d\theta \qquad n \geq 3$$

Remarque : formule de réduction si $n \geq 3$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

On pose :

$$\int \sec^n x\,dx \qquad u = \sec^{n-2} x \quad dv = \sec^2 x\ dx$$

Si $n \geq 3$

On arrive à

Formule de réduction

$$\int \sec^n \theta\,d\theta = \frac{\sec^{n-2}\theta\tan\theta}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}\theta\ d\theta$$

Exemple 3 : autres cas

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx$$

$$\boxed{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}$$

Formule de réduction

$$\int \sec^n \theta \, d\theta = \frac{\sec^{n-2} \theta \tan \theta}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} \theta \, d\theta$$

Remarque

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$ où m et n sont des entiers positifs.

$$\int \cot^m x \csc^n x \, dx$$ où m et n sont des entiers positifs.

Utiliser les mêmes stratégies que pour

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

Résumé

$$\int \tan^m x \sec^n x \;\; dx$$

où m et n sont des entiers positifs.

Stratégie : tenter un des changements de variable suivants.

n pair
$$\begin{cases} u = \tan x \\ du = \sec^2 x \;\; dx \end{cases}$$

ou

m impair
$$\begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x \;\; dx \end{cases}$$

Enjeux :

A. Réserver le bon du

B. Transformer le reste en u grâce à l'identité:

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

Résumé

$\int \tan^m x \sec^n x \; dx$ où m et n sont des entiers positifs.

1. L'exposant de sécante est **pair**. $\begin{cases} u = \tan x \\ du = \sec^2 x \; dx \end{cases}$

2. L'exposant de tangente est **impair**. $\begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x \; dx \end{cases}$

3. Ni l'un ni l'autre (l'exposant de sécante est impair et celui de tangente est pair).
   - A. Transformer tout en puissances de $\sec x$.
   - B. Résoudre $\int \sec^n \theta \; d\theta \quad n \geq 3$ par intégration par parties.

Conception du contenu
Anik Soulière
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu
Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC