Intégration de puissances de sinus et cosinus

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

$$\int \sin^m x \cos^n x \quad dx$$ où m ou n est un entier positif.

Cas où au moins une
des deux puissances est **impaire**.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \quad du$$

$$\int \sin^7 x \, dx$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \quad du$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^3 x} dx$$

Cas où toutes
les puissances sont **paires**.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, du$$

$$\int \sin^4 x \, du$$

$$\int \cos^6 x \, du$$

Exemple 1 : cas où une des deux puissances est impaire

$$\int \sin^4 x \underbrace{\cos^{3} x\, dx}_{\underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)} \boxed{\cos x \quad dx}}$$

impair

pair

But : faire un des changements de variable suivants.

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x \; dx \end{cases}$$

ou $$\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x \; dx \end{cases}$$

Un outil : l'identité

$$\boxed{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1}$$

Exemple 1 : cas où une des deux puissances est impaire

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$$

Survol de quelques cas possibles

impair

$$\int \underbrace{\sin^5 x}_{\sin^4 x \quad \sin x} \cos^4 x \, dx$$

$$u = \cos x$$

impair impair

$$\int \sin^3(2z) \cos^5(2z) \, dz$$

Même argument

On a l'embarras du choix!

$$u = \cos(2z)$$

impair

$$\int \underbrace{\cos^3 x}_{\cos^2 x \quad \cos x} \, dx$$

$$u = \sin x$$

pair pair

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

?

Exemple 2 : cas où toutes les puissances sont paires

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

Tentative

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^4 x \underbrace{\cos x}_{\sqrt{1-\sin^2 x}} \underbrace{\cos x\ dx}_{du}$$

$$\begin{cases} u = & \sin x \\ du = & \cos x\ dx \end{cases}$$

$$= \int u^4 \sqrt{1-u^2}\ du$$

Tableau résumé

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \; dx$ $\int \cos x \; dx$	**Formules de base**	$\int \sin^2 x \; dx$ $\int \cos^2 x \; dx$	**Identités trigo** $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
$\int \tan x \; dx$ $\int \cot x \; dx$	**Rapports de sin et cos** $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\int \tan^2 x \; dx$ $\int \cot^2 x \; dx$	**Identités trigo** $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\int \sec x \; dx$ $\int \csc x \; dx$	**« Supers astuces »** $= \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$ $= \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$	$\int \sec^2 x \; dx$ $\int \csc^2 x \; dx$	**Formules de base**

Exemple 2 : cas où toutes les puissances sont paires

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

En utilisant les identités suivantes, à répétition,

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

on diminue les exposants pairs

jusqu'à obtenir des formes plus faciles à intégrer.

Exemple 2 : cas où toutes les puissances sont paires

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

Exemple 2 : cas où toutes les puissances sont paires

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int \left(\sin^2(2x) - \sin^2(2x)\cos(2x)\right) dx$$

Résumé

Cas où au moins une des deux puissances est impaire

$$\int (\sin^{IMPAIR} x)(\cos^{N} x)\, dx \qquad \int (\sin^{N} x)(\cos^{IMPAIR} x)\, dx$$

$IMPAIR$ un entier positif impair

N un réel quelconque

But : faire un des changements de variable suivants.

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x \; dx \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x \; dx \end{cases}$$

Résumé

1. Scinder la fonction sous l'exposant **impair**.
2. Réserver une fonction pour le « du ».
3. Tout transformer en terme de l'autre fonction à l'aide de l'identité
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
4. Effectuer le changement de variable approprié.

$$\int (\sin^N x)(\underbrace{\cos^{IMPAIR} x)\, dx}_{\underbrace{\cos^{PAIR} x}_{\substack{\text{Transformer} \\ \text{grâce à} \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}} \quad \underbrace{\cos x \ \ dx}_{\substack{\text{Réserver} \\ \text{pour le } du}}}$$

$$\begin{cases} u = & \sin x \\ du = & \cos x \ \ dx \end{cases}$$

Résumé

Cas où toutes les puissances sont paires

$$\int (\sin^{PAIR} u)(\cos^{PAIR} u)\, du \qquad \int (\sin^{PAIR} u)\, du \qquad \int (\cos^{PAIR} u)\, du$$

$PAIR$ un entier positif pair

En utilisant les identités suivantes, on diminue les exposants pairs jusqu'à obtenir des formes plus faciles à intégrer.

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC