

Simplifier une intégrale au moyen d'une complétion de carré

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13$$

$$= -16 < 0$$

Polynôme de degré 2
irréductible
($\Delta < 0$)

- Degré du numérateur < degré du dénominateur
- Pas de changement de variable possible



Méthode de décomposition en fractions partielles?

Exemple 1

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx$$

Nouvelle stratégie

1. Compléter le carré de $x^2 + 6x + 13$.
2. Réorganiser algébriquement en vue d'un changement de variable menant à la formule de base:

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C$$

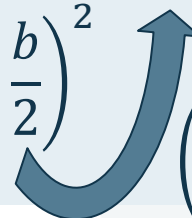
Exemple 1

1. Compléter le carré de $x^2 + 6x + 13$.

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx$$

Complétion de carré

Le binôme $x^2 + bx$ devient un carré parfait si on lui ajoute $\frac{b^2}{4}$

$$\begin{aligned} & x^2 + bx + \frac{b^2}{4} \\ = & \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$


En pratique

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} + \underbrace{-\frac{b^2}{4} + c}_K \end{aligned}$$

$$\text{où } K = -\frac{b^2}{4} + c$$

Exemple 1

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx = \int \frac{1}{(x + 3)^2 + 4} dx$$

2. Réorganiser algébriquement en vue d'un changement de variable menant à la formule de base:

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C$$

Exemple 2

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 8}} dx$$

Stratégie

1. Compléter le carré de $-4x^2 + 8x + 8$
2. Réorganiser algébriquement en vue d'un changement de variable menant à la formule de base:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \arcsin u + C$$

Exemple 2

1. Compléter le carré de $-4x^2 + 8x + 8$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 8}} dx$$

Exemple 2

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 8}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-4 \left((x-1)^2 - 3 \right)}} dx$$

2. Réorganiser algébriquement en vue d'un changement de variable menant à la formule de base:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C$$

Résumé

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx$$

$$\Delta = b^2 - 4 < 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 3}} dx$$

Étape 1 : Compléter le carré du polynôme de degré 2.

Étape 2 : Réorganiser algébriquement en vue d'un changement de variable menant à l'une des deux formules de base suivantes:

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \arcsin u + C$$

Résumé

Étape 1 : Compléter le carré du polynôme $x^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{\substack{\uparrow \\ \left(\frac{b}{2}\right)^2}} - \frac{b^2}{4} + c\end{aligned}$$

Résumé

Étape 1 : Compléter le carré du polynôme $x^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} + \underbrace{\left(-\frac{b^2}{4} + c\right)}_K\end{aligned}$$

$$\text{où } K = -\frac{b^2}{4} + c$$

Cas $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 1$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca