

Règles de décomposition en fractions partielles

Cas des facteurs linéaires et quadratiques

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Mise en contexte

Intégrale d'une
fonction rationnelle

$$\int \frac{1 + x}{x^3 + 10x^2 + 25x} dx$$

polynôme

polynôme

- Degré du numérateur < degré du dénominateur
- Aucun changement de variable possible



**Méthode de décomposition en
fractions partielles**

$$\frac{1 + x}{x^3 + 10x^2 + 25x} = \frac{?}{?} + \frac{?}{?} + \frac{?}{?}$$

Règles de décomposition en fractions partielles

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ fonction rationnelle telle que le degré de $P(x) <$ degré de $Q(x)$

Étape 1 : Factoriser le dénominateur. Les facteurs doivent être irréductibles.

Étape 2 : À chaque facteur irréductible est associé une ou plusieurs fractions partielles.

Cas d'un facteur de degré 1

Forme du facteur	Fraction(s) partielle(s) associée(s)
$ax + b$ Facteur linéaire	$\frac{A_1}{ax + b}$ où A_1 est une constante réelle à déterminer.

Règles de décomposition en fractions partielles

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ fonction rationnelle telle que le degré de $P(x) <$ degré de $Q(x)$

Étape 1 : Factoriser le dénominateur. Les facteurs doivent être irréductibles.

Étape 2 : À chaque facteur irréductible est associé une ou plusieurs fractions partielles.

Cas d'un facteur de degré 1 de multiplicité n

Forme du facteur	Fraction(s) partielle(s) associée(s)
$(ax + b)^n$ Facteur linéaire de multiplicité n	$\frac{A_1}{(ax + b)^1} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$

où les A_i sont des constantes réelles à déterminer.

Exemple 1 : poser les bonnes fractions partielles

Identifier la décomposition en fractions partielles, sans calculer les valeurs des constantes (A, B, C, \dots).

$$\frac{1+x}{x(x+5)} = \frac{A}{(x)^1} + \frac{B}{(x+5)^1}$$

2 facteurs \Rightarrow 2 fractions

de degré 1 \Rightarrow les numérateurs sont de degré 0 (des constantes)

non répétés (multiplicité 1)

Exemple 2 : poser les bonnes fractions partielles

Identifier la décomposition en fractions partielles, sans calculer les valeurs des constantes (A, B, C, \dots).

$$\frac{1+x}{x(x+5)^2} = \frac{A}{(x)^1} + \frac{B}{(x+5)^1} + \frac{C}{(x+5)^2}$$

3 facteurs

tous de degré 1

x n'est pas répété (multiplicité 1).

$(x+5)$ est de multiplicité 2.

Exemple 3 : poser les bonnes fractions partielles

Identifier la décomposition en fractions partielles, sans calculer les valeurs des constantes (A, B, C, \dots).

$$\frac{1+x}{x^3(x-5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x-5)^1} + \frac{E}{(x-5)^2}$$

5 facteurs

x est un facteur de degré 1 et est de multiplicité 3.

$(x-5)$ est un facteur de degré 1 et est de multiplicité 2.

Exemple 4 : avec un facteur quadratique irréductible

$$\int \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + x} dx$$

$$\begin{array}{l} \text{Degré num.} < \text{Degré dén.} \\ =2 < =3 \end{array}$$

Étape 1 : Décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles.

$$x^3 + x = x(x^2 + 1)$$

Facteur de
degré 1
(irréductible)

Factorisation d'un polynôme de degré 2

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$\text{où } r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

irréductible si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Exemple 4 : avec un facteur quadratique irréductible

$$\int \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + x} dx$$

$$\begin{array}{l} \text{Degré num.} < \text{Degré dén.} \\ =2 < =3 \end{array}$$

Étape 1 : Décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles.

$$x^3 + x = x \underbrace{(x^2 + 1)}$$

Facteur de
degré 1
(irréductible)

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= -4 < 0 \end{aligned}$$

Facteur de
degré 2
irréductible
($\Delta < 0$)

Exemple 4 : avec un facteur quadratique irréductible

Identifier la décomposition en fractions partielles de l'intégrande, sans calculer les valeurs des constantes (A, B, C, \dots).

Étape 2 : À chaque facteur irréductible est associé une ou plusieurs fractions partielles.

$$\frac{3x^2 + 5x + 4}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Chaque facteur fait apparaître une fraction partielle:

- si le facteur associé est de degré 1, le numérateur sera de degré 0 (une constante);
 - si le facteur associé est de degré 2, le numérateur sera de degré 1;
- où A, B et C sont des constantes réelles à déterminer.

Règles de décomposition en fractions partielles

Étape 2 : À chaque facteur irréductible est associé une ou plusieurs fractions partielles.

Cas d'un facteur de degré 2 de multiplicité n

Forme du facteur	Fraction(s) partielle(s) associée(s)
$(\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\Delta < 0})^n$ Facteur quadratique irréductible de multiplicité n	$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^1} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$ où les A_i, B_i sont des constantes réelles à déterminer.

Exemple 5 : poser les bonnes fractions partielles

Identifier la décomposition en fractions partielles, sans calculer les valeurs des constantes (A, B, C, \dots).

$$\frac{1+x}{(x^2+1)(2x-5)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(2x-5)^1} + \frac{D}{(2x-5)^2} + \frac{E}{(2x-5)^3}$$

4 facteurs

$(x^2 + 1)$ est de degré 2 et n'est pas répété.

$(2x - 5)$ est de degré 1
et est de multiplicité 3.

Exemple 6 : poser les bonnes fractions partielles

Identifier la décomposition en fractions partielles, sans calculer les valeurs des constantes (A, B, C, \dots).

$$\frac{1+x}{x^3(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^1} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

5 facteurs

x est un facteur de degré 1 et est de multiplicité 3.

$x^2 + 4$ est un facteur de degré 2 et est de multiplicité 2.

Résumé

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ fonction rationnelle telle que le degré de $P(x) <$ degré de $Q(x)$

Étape 1 : Factoriser le dénominateur. Les facteurs doivent être irréductibles.

- Tout facteur linéaire $ax + b$ est irréductible.
- Un facteur quadratique $ax^2 + bx + c$ est irréductible si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Étape 2 : À chaque facteur irréductible est associé une ou plusieurs fractions partielles.

Résumé

Forme du facteur	Fraction(s) partielle(s) associée(s)
$(ax + b)^n$ Facteur linéaire (de degré 1) de multiplicité n	$\frac{A_1}{(ax + b)^1} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$
$(ax^2 + bx + c)^n$ facteur quadratique (de degré 2) de multiplicité n	$\frac{B_1x + C_1}{(ax^2 + bx + c)^1} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$ <p>où les A_i, B_i et C_i sont des constantes réelles à déterminer.</p>

Résumé

En pratique

$$\frac{1+x}{(x^2+1)(2x-5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(2x-5)^1} + \frac{D}{(2x-5)^2}$$

- Il y aura le même nombre de fractions partielles que de facteurs.
- Le polynôme inconnu au numérateur est d'un degré inférieur au facteur non répété qui lui est associé.
- Si un facteur est de multiplicité n , il sera présent n fois et affecté des exposants $1, 2, \dots$, jusqu'à n .

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca