

Intégration par décomposition en fractions partielles

Introduction et cas des facteurs linéaires non répétés

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Intégrer une fonction rationnelle

1. Formule de base?

Non ↓

2. Simplification?

Non ↓

3. Changement de variable?

Non ↓

Méthode de décomposition en fractions partielles

$$\int \underbrace{\frac{7x + 3}{x^2 + x}}_{u'} dx$$

polynôme

polynôme

Degré du numérateur \geq Degré du dénominateur
1 < 2

Effectuer une division de polynômes

$$\int \frac{1}{u(x)} u'(x) dx \quad \int (u(x))^n u'(x) dx$$

Changement de variable?

Qu'est-ce que la décomposition en fractions partielles?

Mettre à un dénominateur commun


$$\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x} = \frac{7x+3}{x^2+x}$$

Décomposer en une somme de fractions partielles

$$\begin{aligned}\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x} &= \frac{4}{(x+1)} \frac{x}{x} + \frac{3}{x} \frac{(x+1)}{(x+1)} \\ &= \frac{4x+3x+3}{(x+1)x} \\ &= \frac{7x+3}{x^2+x}\end{aligned}$$

Pourquoi est-ce utile en calcul intégral?

Décomposer en une somme
de fractions partielles


$$\int \frac{7x + 3}{x^2 + x} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x + 1} \right) dx$$

$$= \underbrace{\int \frac{3}{x} dx}_{\text{Facile}} + \underbrace{\int \frac{4}{x + 1} dx}_{\text{Facile}}$$

$$= 3 \ln|x| + 4 \ln|x + 1| + C$$

Exemple : facteurs linéaires non répétés

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

Degré num. = 1 < Degré dén. = 2

Étape 1 : Décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles.

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$$

2 facteurs de degré 1
sans répétition

Étape 2 : Écrire l'intégrande comme une somme de fractions partielles.

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}$$

où A et B sont des constantes réelles à déterminer.

Chaque facteur fait apparaître une fraction partielle.

Si le facteur associé est de degré 1, le numérateur sera de degré 0 (une constante).

Exemple : facteurs linéaires non répétés

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 3)}$$

Décomposition en fractions partielles

Mise à un dénominateur commun

Les dénominateurs sont égaux

Les numérateurs sont égaux

Pour trouver A et B : deux méthodes possibles.

Exemple : facteurs linéaires non répétés

Déterminer A et B :
présentation de deux méthodes.

Méthode 1

Substituer par des valeurs de x .

Méthode 2

Identifier les coefficients des
termes de même degré.

On peut aussi combiner
les deux méthodes.

Exemple : facteurs linéaires non répétés

Méthode 1

Substituer par des valeurs de x .

$$\underbrace{3x + 1}_{\text{polynôme}} = \underbrace{A(x + 3) + B(x - 1)}_{\text{polynôme}}$$

$$\text{Si } x = 1$$

$$\text{Si } x = -3$$

Si deux polynômes sont égaux, ils le sont pour toutes valeurs de x réelles.

Exemple : facteurs linéaires non répétés

Méthode 2

Identifier les coefficients des termes de même degré.

$$\underbrace{3x + 1}_{\text{polynôme}} = \underbrace{A(x + 3) + B(x - 1)}_{\text{polynôme}}$$

Si deux polynômes sont égaux, les coefficients de termes de même degré sont égaux.

Exemple : facteurs linéaires non répétés

Dernière étape : Retour à l'intégrale de départ.

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$\underbrace{\quad}_{A=1}$ $\underbrace{\quad}_{B=2}$

Résumé

Intégrale d'une
fonction rationnelle

$$\int \frac{7x + 3}{x^2 + x} dx$$

polynôme

polynôme

- Degré du numérateur < degré du dénominateur
- Aucun changement de variable possible



**Méthode de décomposition en
fractions partielles**

Résumé

La décomposition en fractions partielles est le processus inverse de la mise au même dénominateur.

Mettre à un dénominateur
commun

$$\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x} = \frac{7x+3}{x^2+x}$$

Décomposer en une somme
de fractions partielles

Résumé

Son utilisation en calcul intégral vise à décomposer une fonction rationnelle en plusieurs petites fractions plus faciles à intégrer.

$$\begin{aligned}\int \frac{7x + 3}{x^2 + x} dx &= \int \left(\frac{4}{x + 1} + \frac{3}{x} \right) dx \\ &= \underbrace{\int \frac{4}{x + 1} dx}_{\text{Facile}} + \underbrace{\int \frac{3}{x} dx}_{\text{Facile}}\end{aligned}$$

Résumé

Étape 1 : Décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles.

Étape 2 : Écrire l'intégrande comme une somme de fractions partielles.

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$$(x - 1)(x + 3)$$

2 facteurs linéaires

(de degré 1)

sans répétition

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}$$

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{(x - 1)} \frac{(x + 3)}{(x + 3)} + \frac{B}{(x + 3)} \frac{(x - 1)}{(x - 1)}$$

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}$$

$$3x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1)$$

Résumé

$$\underbrace{3x + 1}_{\text{polynôme}} = \underbrace{A(x + 3) + B(x - 1)}_{\text{polynôme}}$$

Méthode 1

Substituer par des valeurs de x .

$$\text{Si } x = 1$$

$$3 \cdot 1 + 1 = A(1 + 3) + B(1 - 1)$$

$$4 = 4A + 0B$$

$$A = 1$$

$$\text{Si } x = -3$$

$$3 \cdot (-3) + 1 = A(-3 + 3) + B(-3 - 1)$$

$$-8 = 0A - 4B$$

$$B = 2$$

Résumé

$$\underbrace{3x + 1}_{\text{polynôme}} = \underbrace{A(x + 3) + B(x - 1)}_{\text{polynôme}}$$

Méthode 2

Identifier les coefficients des termes de même degré.

$$3x + 1 = Ax + 3A + Bx - B$$

$$3x + 1 = (A + B)x + (3A - B)$$

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ 1 = 3A - B \end{cases} \Rightarrow B = 3 - A \quad \begin{array}{l} 1 = 3A - (3 - A) \\ 4 = 4A \\ A = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} B = 3 - A \\ B = 3 - 1 \\ B = 2 \end{array}$$

Résumé

Dernière étape : Retour à l'intégrale de départ.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3} dx &= \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 3} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x - 1} dx + 2 \int \frac{1}{x + 3} dx \\ &= \ln|x - 1| + 2 \ln|x + 3| + C\end{aligned}$$

Résumé

$$\int \frac{3x + 1}{\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{(x-1)(x+3)}} dx$$

facteurs linéaires
(de degré 1)
sans répétition

Mise en garde

Les règles de décomposition en fractions partielles diffèrent si le dénominateur se décompose en:

- facteurs linéaires répétés;
- facteurs quadratiques irréductibles répétés ou non.

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca