

Intégration de six fonctions trigonométriques de base et de leurs carrés

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Faire le point

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$		$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$		$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$		$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	

Commençons par le plus facile

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$	Formules de base	$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$		$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$		$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	Formules de base

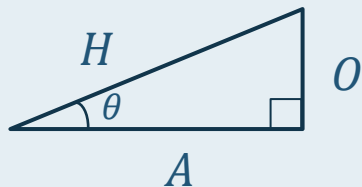
Commençons par le plus facile

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$	$= -\cos x + C$ $= \sin x + C$	$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$		$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$		$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	$= \tan x + C$ $= -\cot x + C$

tan x et cot x

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$	Formules de base	$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$	Rapports de sin et cos $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$		$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	Formules de base

Les rapports trigonométriques



H : hypoténuse

A : côté adjacent à l'angle θ

O : côté opposé à l'angle θ

SOH

CAH

TOA

1. $\sin \theta = \frac{O}{H}$

2. $\cos \theta = \frac{A}{H}$

3. $\tan \theta = \frac{O}{A} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

4. $\csc \theta = \frac{H}{O} = \frac{1}{\sin \theta}$

5. $\sec \theta = \frac{H}{A} = \frac{1}{\cos \theta}$

6. $\cot \theta = \frac{A}{O} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

Exemple 1

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

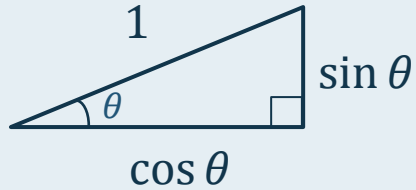
En exercice :

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$\tan^2 x$ et $\cot^2 x$: les identités liées au th. de Pythagore

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$	Formules de base	$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$	Rapports de sin et cos $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	Identités trigo $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$		$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	Formules de base

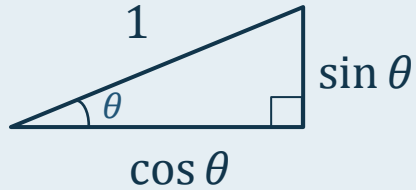
Quelques identités utiles en calcul intégral



$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

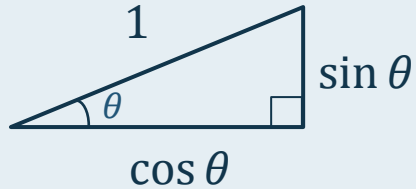
Quelques identités utiles en calcul intégral



$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{1}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{1}$$

Quelques identités utiles en calcul intégral



Théorème de Pythagore

1. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

2. $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

3. $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

$\div \cos^2 \theta$

$\div \sin^2 \theta$

Exemple 2

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

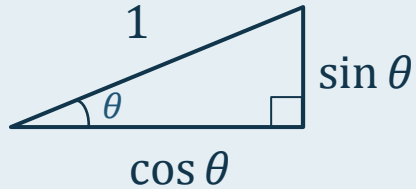
En exercice :

$$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + C$$

$\sin^2 x$ et $\cos^2 x$: les identités qui contiennent $\cos(2x)$

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$	Formules de base	$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	Identités trigo $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$	Rapports de sin et cos $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	Identités trigo $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$		$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	Formules de base

Quelques identités utiles en calcul intégral



Théorème de Pythagore

1. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

2. $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

3. $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

$\div \cos^2 \theta$

$\div \sin^2 \theta$

4. $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$

5. $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$

Exemple 3

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx$$

En exercice :

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

sec x et csc x : les supers astuces

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$	Formules de base	$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	Identités trigo $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$	Rapports de sin et cos $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	Identités trigo $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$	« Supers astuces » $= \ln \sec x + \tan x + C$ $= -\ln \csc x + \cot x + C$	$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	Formules de base

Exemple 4

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} \, dx$$

En exercice :

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \quad \text{ou} \quad -\ln|\csc x + \cot x| + C$$



Résumé

Intégrales	Quoi utiliser?	Intégrales	Quoi utiliser?
$\int \sin x \, dx$ $\int \cos x \, dx$	Formules de base	$\int \sin^2 x \, dx$ $\int \cos^2 x \, dx$	Identités trigo $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
$\int \tan x \, dx$ $\int \cot x \, dx$	Rapports de sin et cos $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\int \tan^2 x \, dx$ $\int \cot^2 x \, dx$	Identités trigo $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx$	« Supers astuces » $= \ln \sec x + \tan x + C$ $= -\ln \csc x + \cot x + C$	$\int \sec^2 x \, dx$ $\int \csc^2 x \, dx$	Formules de base

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca