Intégration par parties

Cas répétitifs et cas cycliques

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Formule d'intégration par parties

$$\underbrace{\int u\ dv}_{\text{Intégrale à résoudre}} = \underbrace{u\,v}_{\substack{\text{1re partie :}\\ \text{Un produit de}\\ \text{fonctions}}} - \underbrace{\int v\ du}_{\substack{\text{2e partie :}\\ \text{Nouvelle intégrale}\\ \text{(plus facile ou de même difficulté)}}}$$

$u =$ $\qquad dv =$

Réappliquer à nouveau

la formule d'intégration par parties

- Cas répétitif : on applique la formule jusqu'à ce qu'on obtienne une intégrale facile à évaluer.
- Cas cyclique : une répétition de la formule fait réapparaître l'intégrale de départ.

Exemple 1 : cas répétitif

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \; dx$

$du = 2x \, dx \qquad v = \sin x$

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = x^2 \sin x \; -2 \int x \sin x \; dx$$

$$\boxed{\int u \, dv \quad = uv - \int v \, du}$$

Exemple 1 : cas répétitif

$$\int x^2 \cos x \, dx \qquad \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cos x \, dx \\ du = 2x \, dx & v = \sin x \end{array}$$

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$

Garder le même choix pour u et dv

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x \, dx \\ du = 1 \, dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = x^2 \sin x - 2 \left[-x \cos x + \underbrace{\int \cos x \, dx}_{\sin x + C_1} \right]$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \qquad \text{où } C = -2C_1$$

Combien de répétitions?

$$\int x^6 \cos x \, dx$$

Combien de fois doit-on appliquer la formule d'intégration par parties pour résoudre cette intégrale?

Réponse : 6 fois

1. $u = x^6$ $\quad dv = \cos x \; dx$
$du = 6x^5 \, dx \quad v = \sin x$

2. $u = x^5 \quad dv = \sin x \; dx$
$du = 5x^4 \, dx \quad v = -\cos x$

3. $u = x^4 \quad dv = -\cos x \; dx$
$du = 4x^3 \, dx \quad v = -\sin x$

4. $u = x^3 \quad dv = -\sin x \; dx$
$du = 3x^2 \, dx \quad v = \cos x$

5. $u = x^2 \quad dv = \cos x \; dx$
$du = 2x \, dx \quad v = \sin x$

6. $u = x \quad dv = \sin x \; dx$
$du = 1 \, dx \quad v = -\cos x$

Exemple 2 : cas cyclique

$$\int e^{3x} \cos x \, dx$$

$$u = e^{3x} \qquad dv = \cos x \; dx$$

$$du = 3e^{3x} \, dx \quad v = \sin x$$

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - 3 \int e^{3x} \sin x \; dx$$

Exemple 2 : cas cyclique

$$\int e^{3x} \cos x \, dx$$

$$u = e^{3x} \qquad dv = \cos x \; dx$$

$$du = 3e^{3x} \, dx \quad v = \sin x$$

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - 3 \int e^{3x} \sin x \; dx$$

Garder le même choix pour u et dv

$$u = e^{3x} \qquad dv = \sin x \quad dx$$

$$du = 3e^{3x} \; dx \quad v = -\cos x$$

$$\underbrace{\int e^{3x} \cos x \, dx}_{I} = e^{3x} \sin x - 3 \left[-e^{3x} \cos x + 3 \underbrace{\int e^{3x} \cos x \, dx}_{I} \right]$$

$$I = e^{3x} \sin x - 3 \left[-e^{3x} \cos x + 3I \right]$$

Exemple 2 : cas cyclique

$$I = e^{3x}\sin x - 3[-e^{3x}\cos x + 3I\ ]$$

$$I = e^{3x}\sin x + 3e^{3x}\cos x - 9I$$

$$I + 9I = e^{3x}\sin x + 3e^{3x}\cos x$$

$$10\ I = e^{3x}(\sin x + 3\cos x)$$

$$I = \frac{1}{10}\ e^{3x}(\sin x + 3\cos x)$$

Conclusion

$$\int e^{3x}\ \cos x\, dx = \frac{1}{10}\ e^{3x}(\sin x + 3\cos x)\quad + C$$

Cas cycliques : reconnaître quelques exemples classiques

$$\underbrace{\int e^{3x} \cos x \, dx \qquad \int 2^{x} \sin(4x) \, dx \qquad \int \sin x \, \sin(5x) \, dx}$$

Produit de fonctions:
exponentielles, sinus ou cosinus
qui n’ont pas de lien de dérivée.

$$\int \overbrace{\sin x}^{u} \, \overbrace{\cos x \, dx}^{du}$$

Résumé

$$\underbrace{\int u\,dv}_{\text{Intégrale à résoudre}} = \underbrace{u\,v}_{\substack{\text{1re partie :}\\ \text{Un produit de}\\ \text{fonctions}}} - \underbrace{\int v\,du}_{\substack{\text{2e partie :}\\ \text{Nouvelle intégrale}\\ \text{(plus facile ou de même difficulté)}}}$$

$u =$ $\quad$ $dv =$

Réappliquer à nouveau
la formule d'intégration par parties

- Cas répétitif
- Cas cyclique

Résumé

Lorsqu'on répète l'intégration par parties, il est important de garder le même choix de u et de dv.

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \; dx$

$du = 2x \, dx \qquad v = \sin x$

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = x^2 \sin x \; -2 \int x \sin x \; dx$$

$u = x \qquad dv = \sin x \quad dx$

Garder le même choix pour u et dv

Résumé

Après répétitions, lorsqu'on retrouve une intégrale identique à notre intégrale de départ, on isole algébriquement cet inconnu. On peut l'identifier à une lettre pour faciliter les manipulations algébriques.

$$\underbrace{\int e^{3x}\cos x\,dx}_{I} = e^{3x}\sin x - 3\left[-e^{3x}\cos x + 3\underbrace{\int e^{3x}\cos x\,dx}_{I}\right]$$

$$I = e^{3x}\sin x - 3\left[-e^{3x}\cos x + 3I\right]$$

Résumé

Afin d'alléger les calculs, on peut attendre la fin de la démarche pour ajouter la constante d'intégration.

$$I = e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x - 9I$$

$$I + 9I = e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x$$

$$10\, I = e^{3x}(\sin x + 3 \cos x)$$

$$I = \frac{1}{10}\, e^{3x}(\sin x + 3 \cos x) \quad + C$$

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL *de* LANAUDIÈRE *à* Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC