

Intégration par parties

Introduction

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Se poser les bonnes questions

$$\int x e^x dx = ?$$

1. Est-ce une **formule de base**?

Non

2. Est-ce qu'une **simplification** peut ramener l'intégrande à une formule de base?

Non

3. Est-ce que l'intégrande est la dérivée d'une **composition de fonctions**?

Oui

Changement de variable

Non

4. Est-ce qu'un **changement de variable** peut quand même simplifier l'intégrande?

Nouveaux cas à régler

$$\int x^2 \cos(x) dx$$

$$\int e^x \sin(x) dx$$

$$\int \arctan(x) dx$$

$$\int \ln(x) dx$$

Produit de 2 types de fonctions
sans lien de dérivée

Cas « désespérés »

Dérivée
d'un produit



$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Construction d'une nouvelle formule

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Règle de dérivation d'un produit

$$\underbrace{\int (u(x) \cdot v(x))' dx}_{\text{}} = \int (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) dx$$

Intégrer des 2 côtés par rapport à x

$$u(x) \cdot v(x) = \int v(x) \cdot u'(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Isoler une des intégrales

Formule d'intégration par parties

$$\underbrace{\int u(x) \cdot v'(x) dx}_{\substack{\text{Intégrale à résoudre :} \\ \text{Réécrite en un produit de 2 fonctions}}} = \underbrace{u(x) \cdot v(x)}_{\substack{1^{\text{re}} \text{ partie :} \\ \text{Un produit de fonctions}}} - \underbrace{\int v(x) \cdot u'(x) dx}_{\substack{2^{\text{e}} \text{ partie :} \\ \text{Nouvelle intégrale} \\ \text{qu'on souhaite plus facile ou} \\ \text{de même difficulté}}$$

Formule d'intégration par parties : version compacte

$$\int \underbrace{u(x)}_u \cdot \underbrace{v'(x) dx}_{dv} = \underbrace{u(x)}_u \cdot \underbrace{v(x)}_v - \int \underbrace{v(x)}_v \cdot \underbrace{u'(x) dx}_{du}$$

Formule d'intégration par parties

$$\int u dv = uv - \int v du$$

On pose:

$$u = u(x)$$

$$du = u'(x) dx$$

$$v = v(x)$$

$$dv = v'(x) dx$$

Exemple 1 : produit de deux types de fonctions

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x dx}_{dv}$$

On pose:

$$u = \quad \quad \quad dv =$$

$$\int x e^x dx =$$

$$\int u dv = uv - \underbrace{\int v du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

Il n'est pas nécessaire d'ajouter C.

Exemple 2 : et si l'on avait fait l'autre choix?

$$\int x \underbrace{e^x}_u dx$$

Diagram: In the integral $\int x e^x dx$, an arrow labeled dv points to e^x , and a bracket labeled u is under e^x .

On pose:

$$u =$$

$$dv =$$

$$\int x e^x dx =$$

$$\int u dv = uv - \underbrace{\int v du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

Exemple 3 : cas « désespéré »

$$\int \ln(x) \, dx$$

On pose:

$$u =$$

$$dv =$$

$$\int \ln(x) \, dx =$$

$$\int u \, dv = uv - \underbrace{\int v \, du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

Intégration par parties d'une intégrale définie

Formules d'intégration par parties

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Résumé

$$\int x^2 \cos(x) dx \quad \int e^x \sin(x) dx$$



Produit de 2 types de fonctions
sans lien de dérivée

$$\int \arctan(x) dx \quad \int \ln(x) dx$$



Cas « désespérés »

Formule d'intégration par parties

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Découle de :

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Résumé

Pour nous guider dans le bon choix du u , il faut avant tout s'assurer que la deuxième intégrale sera plus facile ou de même difficulté.

Formule d'intégration par parties

$$\int u \, dv = uv - \underbrace{\int v \, du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

Plus facile ou
de même difficulté

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Crédit images

Pixabay

pixabay.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca