

Intégration par parties

Faire le bon choix

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Formule d'intégration par parties

$$\underbrace{\int u \, dv}_{\text{Intégrale à résoudre}} = \underbrace{u v}_{\substack{1^{\text{e}} \text{ partie :} \\ \text{Un produit de} \\ \text{fonctions}}} - \underbrace{\int v \, du}_{\substack{2^{\text{e}} \text{ partie :} \\ \text{Nouvelle intégrale} \\ \text{(plus facile ou de même difficulté)}}$$

$$\begin{aligned} u = & \quad dv = \\ du = & \quad v = \end{aligned}$$

Règles à suivre pour faire le bon choix

$u = ?$

$dv = ?$

$$\int u \, dv = uv - \underbrace{\int v \, du}$$

Plus facile ou
de même difficulté

En général, privilégier, dans l'ordre, les fonctions:

A : arctan(x), arccos(x), ...

L : logarithmiques : ln(x), log _{b} x , ...

P : polynomiales : x^2 , x^9 , ...

E : exponentielles : e^x , 3^x , ...

S : sinus et cosinus : sin x , cos x .

} Fonctions
} passe-partout

Attention : c'est un guide, des exceptions existent...

dv : doit être facile à intégrer.
Sa primitive doit simplifier
la 2^e intégrale.

Exemple 1 : faire le bon choix

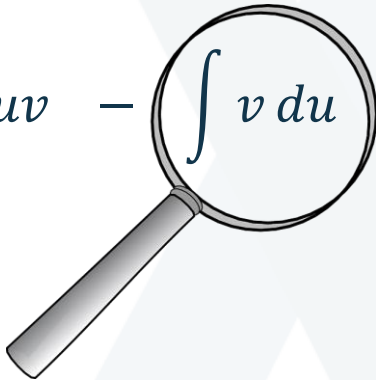
On pose:

$$\int x^2 \cos(x) dx$$

$$u = x^2 \quad dv = \cos(x) dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \sin(x)$$

$$\int u dv = uv - \underbrace{\int v du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$


$$2 \underbrace{\int x \sin(x) dx}_{\text{Plus facile}}$$

⇒ On réapplique la technique sur cette nouvelle intégrale.

Garder le même choix :
 $u = \text{polynôme} \quad dv = \text{trigo}$

Réponse:
 $(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$

Exemple 2 : faire le bon choix

On pose:

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & dv &= x^2 dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$


$$\underbrace{\frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} dx}_{\text{Plus facile}}$$

⇒ On simplifie et on intègre.

Réponse: $\frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + C$

$$\int u dv = uv - \underbrace{\int v du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

Exemple 3 : faire le bon choix

$$\int \underbrace{x^3}_{x^2 \cdot x} e^{x^2} dx$$

On pose:

$$u = x^3 \quad dv = e^{x^2} dx$$

$$du = 3x^2 dx \quad v = ?$$

2x

$$\int u dv = uv - \underbrace{\int v du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

Exemple 3 : faire le bon choix

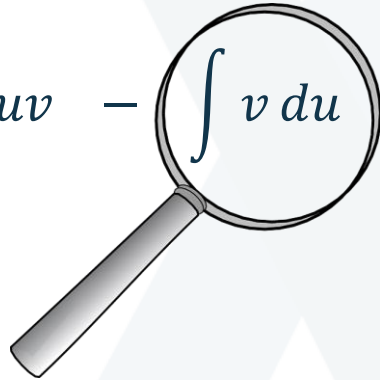
$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

On pose:

$$u = x^2 \quad dv = e^{x^2} x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$



$$\frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x dx$$

Plus facile

\Rightarrow

C'est la dérivée d'une composition de fonction.

$$\text{Réponse: } \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C$$

$$\int u dv = uv - \underbrace{\int v du}_{\text{Plus facile ou de même difficulté}}$$

Résumé

Lors d'une intégration par parties, pour nous guider dans le bon choix de u , il faut avant tout s'assurer que la deuxième intégrale sera plus facile ou de même difficulté.

Formule d'intégration par parties

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Plus facile ou
de même difficulté

Résumé

Pour faire le choix de u , on peut s'aider du truc mnémotechnique «A.L.P.E.S.», mais attention : il ne s'agit pas d'une règle absolue.

$u = ?$

En général, privilégier, dans l'ordre, les fonctions:

A : arctan(x), arccos(x), ...

L : logarithmiques : ln(x), log _{b} x , ...

P : polynomiales : x^2 , x^9 , ...

E : exponentielles : e^x , 3^x , ...

S : sinus et cosinus : sin x , cos x .

Attention : c'est un guide, des exceptions existent...

Résumé

Dans certains cas, il est nécessaire de scinder une puissance de x pour que le dv puisse être intégré.

$$\int \underbrace{x^3}_{x^2 \cdot x} e^{x^2} dx$$

On pose:

$$u = x^3$$

$$du =$$

$$dv = e^{x^2} dx$$

$$v =$$

Résumé

Dans certains cas, il est nécessaire de scinder une puissance de x pour que le dv puisse être intégré.

$$\int \underbrace{x^3}_{x^2 \cdot x} e^{x^2} dx$$

On pose:

$$u = x^2$$

$$du =$$

$$dv = e^{x^2} x dx$$

$$v =$$

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Crédit images

Pixabay

pixabay.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca