Intégration par changement de variable

Cas complexes

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Se poser les bonnes questions

$$\int f(x)\ dx = ?$$

1. Est-ce une **formule de base**?

Non

2. Est-ce qu'une **simplification** peut ramener l'intégrande à une formule de base?

Non

3. Est-ce que l'intégrande est la dérivée d'une **composition de fonctions**?

Oui → Changement de variable

Non

4. Est-ce qu'un **changement de variable** peut quand même simplifier l'intégrande?

Exemple 1

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$$

$(a+b)^n \neq a^n + b^n$

$$= \int (\underbrace{1+2x}_{u})^{-1/2}\ x\ \ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\underbrace{1+2x}_{u})^{-1/2}\ \overset{?}{x}\ \ \underbrace{2\ dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int \ u^{-1/2}\ \left(\frac{u-1}{2}\right)\ du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{1/2} - u^{-1/2})\ \ du$$

$$u = 1+2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u-1}{2}$$

$$du = 2\ dx$$

Exemple 1

$$= \frac{1}{4}\int \left(u^{1/2} - u^{-1/2}\right)\ du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int u^{1/2}\ du - \int u^{-1/2}\ du\right]$$

Propriété de linéarité

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{1/2}}{1/2}\right] + C$$

Formule de base

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

où $n \neq -1$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2(1+2x)^{3/2}}{3} - 2(1+2x)^{1/2}\right] + C$$

Retour à la variable x

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sqrt{1+2x}\right)^3}{3} - \sqrt{1+2x}\right] + C$$

Exemple 1 : et si on avait fait un autre choix?

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$$

$$= \int \underbrace{(1+2x)^{-1/2}}_{u}\; x \;\; dx$$

$$u = (1+2x)^{-1/2}$$

$$du = \frac{-1}{\cancel{2}}(1+2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot \cancel{2}dx$$

$$= \underbrace{-(1+2x)^{-\frac{3}{2}}\,dx}$$

Exemple 2

$$\int \underbrace{x^3}_{x^2 \cdot x} \underbrace{(x^2 + 5)}_{u}^9 \; dx$$

$$u = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = u - 5$$

$$du = 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{(x^2 + 5)}_{u}^9 \underbrace{x^2}_{(u-5)} \; \underbrace{2\, x \;\; dx}_{du}$$

Résumé

$\int f(x)\ dx = ? \rightarrow$ **1.** Est-ce une **formule de base**?

↓ Non

2. Est-ce qu'une **simplification** peut ramener l'intégrande à une formule de base?

↓ Non

3. Est-ce que l'intégrande est la dérivée d'une **composition de fonctions**? $\xrightarrow{\text{Oui}}$ Changement de variable

↓ Non

4. Est-ce qu'un **changement de variable** peut quand même simplifier l'intégrande?

Résumé

Une stratégie possible : poser u comme une somme ou une différence située dans une puissance (entière ou fractionnaire).

$$\int (\underbrace{1+2x}_{u})^{-1/2}\ x\ \ dx$$

$$u = 1 + 2x$$
$$du = 2\,dx$$

Résumé

Pour réussir la substitution, il sera nécessaire d'isoler x dans l'expression de u.

$$\int \underbrace{(1+2x)}_{u}^{-1/2} \; x \;\; dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{(1+2x)}_{u}^{-1/2} \; \overset{?}{x} \;\; \underbrace{2\;dx}_{du}$$

$$u = 1 + 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u-1}{2}$$

$$du = 2\,dx$$

Résumé

Dans certains cas, il est nécessaire de scinder une puissance de la variable avant de substituer.

$$\int \underbrace{x^3}_{x^2 \cdot x} \, (\underbrace{x^2 + 5}_{u})^9 \; dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\underbrace{x^2 + 5}_{u})^9 \, \underbrace{x^2}_{(u-5)} \; \underbrace{2\,x \; dx}_{du}$$

$$u = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = u - 5$$

$$du = 2x \; dx$$

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Crédit images

Pixabay

pixabay.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC