Intégration par changement de variable

Cas simples

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Se poser les bonnes questions

$$\int f(x)\ dx = ?$$

1. Est-ce une **formule de base**?

Non ↓

2. Est-ce qu'une **simplification** peut ramener l'intégrande à une formule de base?

Non ↓

3. Est-ce que l'intégrande est la dérivée d'une **composition de fonctions**?

Oui →

Changement de variable

Rappel

Règle de la dérivation en chaîne

Si $f(u)$ et $u(x)$ sont des fonctions dérivables, alors $f(u(x))$ est dérivable par rapport à x et:

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(u(x)\right)\right] = \frac{d}{du}\left[f(u)\right] \cdot \frac{du}{dx}$$ Notation de Leibniz

ou

$$\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'\left(u(x)\right) \cdot u'(x).$$ Notation « prime »

Dérivation en chaîne et intégration

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \int \cos(x^2)\cdot 2x \; dx = \sin(x^2) + C$$

Règle de la dérivation en chaîne

Si $f(u)$ et $u(x)$ sont des fonctions dérivables, alors $f(u(x))$ est dérivable par rapport à x et:

$$\frac{d}{dx}[f(u(x))] = \frac{d}{du}[f(u)]\cdot\frac{du}{dx}$$ Notation de Leibniz

ou

$$(f(u(x)))' = f'(u(x))\cdot u'(x).$$ Notation « prime »

Dérivation en chaîne et intégration

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \int \cos(x^2)\cdot 2x \; dx = \sin(x^2) + C$$

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x) + 7}\, dx$$

Le changement de variable : pour y voir plus clair

$$\int \cos(\overbrace{\underbrace{x^2}_{u}}^{u(x)}) \cdot \underbrace{\overbrace{2x}^{u'(x)}\ dx}_{du}$$

Posons un changement de variable:

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Longrightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$= \int \cos(u)\ du$$

Changement de variable

$$= \sin(u) + C$$

Formule de base

$$= \sin(x^2) + C$$

Retour à la variable x

Théorème

Le changement de variable

Soit $u(x)$ une fonction dérivable. Si F est une primitive de f, alors:

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{u}) \cdot \underbrace{u'(x)\ dx}_{du}$$

On pose:

$u = u(x)$

$du = u'(x)\ dx$

$$= \int f(u) \qquad du$$

$$= F(u) + C$$

F est la primitive de f

$$= F\big(u(x)\big) + C$$

Retour à la variable x

Exemple 1

$$\int (x^2 + 5)^9 \cdot 2x \, dx$$

$$\boxed{\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{où } n \neq -1}$$

Exemple 2

Stratégie: faire un ajustement de constante.

$$\int (x^2+5)^9 \, \overset{?}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{} \int (x^2+5)^9 \, \overbrace{\frac{2}{2}}^{\cdot 1} \, x \, dx$$

$$u = x^2 + 5$$
$$du = 2x \, dx$$

Exemple 2

Stratégie: faire un ajustement de constante.

?

$$\int (x^2+5)^9 \, x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+5)^9 \, 2 \, x \, dx$$

$$u = x^2 + 5$$
$$du = 2x \, dx$$

Exemple 2 : autre option

$$\int (x^2+5)^9 \, \overset{?}{x \, dx}$$

$$u = x^2 + 5$$
$$du = 2x \, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{2} = x \, dx$$

$$= \int (u)^9 \; \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^9 \, du$$

Exemple 3

$$\boxed{\int e^{u}\ du = e^{u} + C}$$

$$\int e^{x/5}\ dx$$

Exemple 4

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C}$$

Exemple 5

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+7}\,dx$$

$u = \sin(x)$?

$u = \sin^2(x)$?

$u = \sin^2(x) + 7$?

Exemple 5 : essai 1

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x) + 7}\,dx$$

$$u = \sin(x)$$
$$du = \cos(x)\ dx$$

$$= \int \frac{u}{u^2 + 7}\,du$$

En mémoire :

$$= \int \frac{u}{u^2 + 7}\,du \qquad u = \sin(x) \qquad du = \cos(x)\ dx$$

Exemple 5 : essai 2

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+7}\,2\,dx$$

$$u = \sin^2(x)$$
$$du = 2(\sin(x))^1\cos(x)\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+7}\,du$$

En mémoire :

$$= \int \frac{u}{u^2+7}\,du \qquad u = \sin(x), \quad du = \cos(x)\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+7}\,du \qquad u = \sin^2(x), \quad du = 2\sin(x)\cos(x)\;dx$$

Exemple 5 : essai 3

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+7}\,2\,dx$$

$$u = \sin^2(x) + 7$$
$$du = 2(\sin(x))^1 \cos(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

Formule de base

$$= \frac{1}{2}\ln|\sin^2(x) + 7\,| + C$$

En mémoire :

$$= \int \frac{u}{u^2+7}\,du \qquad u = \sin(x),\quad du = \cos(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+7}\,du \qquad u = \sin^2(x),\quad du = 2\sin(x)\cos(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \qquad u = \sin^2(x) + 7,\quad du = 2\sin(x)\cos(x)\ dx$$

Résumé

$$\int f(x)\ dx = ?$$

1. Est-ce une **formule de base**?

Non $\downarrow$

2. Est-ce qu'une **simplification** peut ramener l'intégrande à une formule de base?

Non $\downarrow$

3. Est-ce que l'intégrande est la dérivée d'une **composition de fonctions**?

Oui $\rightarrow$ Changement de variable

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\ dx = F(u(x)) + C$$

Résumé

Méthode directe

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = F(u(x)) + C$$

Changement de variable

$$\int f(\underbrace{u(x)}_{u}) \cdot \underbrace{u'(x)\, dx}_{du}$$

$$= \int f(u) \quad du$$

On pose:

$u = u(x)$

$du = u'(x)\, dx$

$$= F(u) + C$$

Formule de base

$$= F(u(x)) + C$$

Retour à la variable x

Résumé

Lors de la recherche du lien de dérivée, il est possible de faire un **ajustement de constantes** pour compléter la dérivée recherchée.

$$\int (x^2+5)^9 \, x \, dx = \frac{1}{2}\int (x^2+5)^9 \, 2x \, dx$$

Résumé

Dans des cas plus complexes, on peut faire plusieurs essais avant de trouver le meilleur changement de variable.

$u = \sin(x)$?

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x) + 7}\, dx$$

$u = \sin^2(x)$?

$u = \sin^2(x) + 7$?

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC