

Intégrale d'une composition de fonctions

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Se poser les bonnes questions

$$\int f(x) dx = ?$$

1. Est-ce une **formule de base**?

Non ↓

2. Est-ce qu'une **simplification** peut ramener l'intégrande à une formule de base?

Non ↓

3. Est-ce que l'intégrande est la dérivée d'une **composition de fonctions**?

Rappel

Règle de la dérivation en chaîne

Si $f(u)$ et $u(x)$ sont des fonctions dérivables, alors $f(u(x))$ est dérivable par rapport à x et:

$$\frac{d}{dx} [f(u(x))] = \frac{d}{du} [f(u)] \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{Notation de Leibniz}$$

ou

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x). \quad \text{Notation « prime »}$$

Illustration de la dérivation en chaîne et de l'intégration

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad \int \cos(x^2) \cdot 2x \, dx = \sin(x^2) + C$$


Théorème

Intégrale d'une composition de fonctions

Soit $u(x)$ une fonction dérivable. Si F est une primitive de f , c'est-à-dire:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

alors $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$



Généraliser les formules de base d'intégration

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{où } n \neq -1$$

$$\int (u(x))^n \cdot u'(x) dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{où } n \neq -1$$

Intégrale de la
puissance d'une
variable

Intégrale de la
puissance d'une
fonction

Exemple 1

$$\int (x^2 + 5)^9 \cdot 2x \, dx = \frac{(x^2 + 5)^{10}}{10} + C$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u(x))^n \cdot u'(x) \, dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

où $n \neq -1$

Stratégie: faire un ajustement de constantes.

Exemple 2

$$\int (x^2 + 5)^9 x \, dx = \int (x^2 + 5)^9 x \, dx$$

The image shows the integral $\int (x^2 + 5)^9 x \, dx$ on both sides of an equals sign. On the left side, there is a question mark above the exponent 9 and a blue curved arrow pointing from the x term to the $(x^2 + 5)^9$ term. On the right side, there is a blue curved arrow pointing from the x term to the $(x^2 + 5)^9$ term.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u(x))^n \cdot u'(x) \, dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

The image shows the integral $\int (u(x))^n \cdot u'(x) \, dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$. A blue curved arrow points from the $u'(x)$ term to the $(u(x))^n$ term.

où $n \neq -1$

Stratégie: faire un ajustement de constantes.

Exemple 2

$$\int (x^2 + 5)^9 x dx = \int (x^2 + 5)^9 \overbrace{\frac{1}{2}}^{\cdot 1} x dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u(x))^n \cdot u'(x) dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

où $n \neq -1$

Stratégie: faire un ajustement de constantes.

Exemple 2

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 5)^9 x dx &= \frac{1}{2} \int (x^2 + 5)^9 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 5)^{10}}{10} + C \\ &= \frac{(x^2 + 5)^{10}}{20} + C\end{aligned}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u(x))^n \cdot u'(x) dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

où $n \neq -1$

Exemple 3

$$\int e^{x/5} dx =$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{u(x)} \cdot \underbrace{u'(x)} dx = e^{u(x)} + C$$

Exemple 4

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{(x^2+1)} x dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{(u(x))} \cdot u'(x) dx = \ln|u(x)| + C$$

Exemple 5

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \sec^2(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \underbrace{\sec^2(u(x)) \cdot u'(x)} dx = \tan(u(x)) + C$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})' &= (x^{1/2})' \\ &= \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Résumé

$$\int f(x) dx = ?$$

1. Est-ce une **formule de base**?

Non ↓

2. Est-ce qu'une **simplification** peut ramener l'intégrande à une formule de base?


Non ↓

3. Est-ce que l'intégrande est la dérivée d'une **composition de fonctions**?

Résumé

On peut généraliser nos formules de base d'intégration en remplaçant x par une fonction $u(x)$ et en insérant la multiplication par $u'(x)$ dans l'intégrande.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$$


Résumé

Lors de la recherche du lien de dérivée, il est possible de faire un **ajustement de constantes** pour compléter la dérivée recherchée.

$$\int (x^2 + 5)^9 \overset{?}{x} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 5)^9 \overset{2x}{2x} dx$$

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca