

Formules de base d'intégration des fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses

Anik Soulière

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

À la recherche de primitives

Intégrer
(trouver les primitives)

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Dériver

Formules de base de dérivation

$$\frac{d}{dx} C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} x = 1$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csc} x = -\operatorname{csc} x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}$$


$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$


$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$


Formules de dérivation pour sinus et cosinus


$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$



$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$



Formules de dérivation des fonctions trigonométriques

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$



$$\Rightarrow \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$


$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$


$$\Rightarrow \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$


$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$


$$\Rightarrow \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$


$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$


$$\Rightarrow \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$


Trucs mnémotechniques

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

Trucs mnémotechniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \operatorname{csc} x = -\operatorname{csc} x \cot x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \int \cos x \, dx = \sin x + C \right.$$

$$\left\{ \int \sin x \, dx = -\cos x + C \right.$$

$$\left\{ \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \right.$$

$$\left\{ \int \operatorname{csc}^2 x \, dx = -\cot x + C \right.$$

$$\left\{ \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C \right.$$

$$\left\{ \int \operatorname{csc} x \cot x \, dx = -\operatorname{csc} x + C \right.$$

Formules de base d'intégration

1. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

2. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

3. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

5. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

6. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

Exemple 1

$$\int \csc^2 x \, dx =$$



Exemple 2

$$\int \tan x \, dx = ?$$

Formules de base d'intégration

1. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

2. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

3. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

5. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

6. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

Fonctions trigonométriques inverses

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$x \in]-1, 1[$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$$
$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

Et les autres fonctions trigonométriques inverses?

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Et les autres fonctions trigonométriques inverses?

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

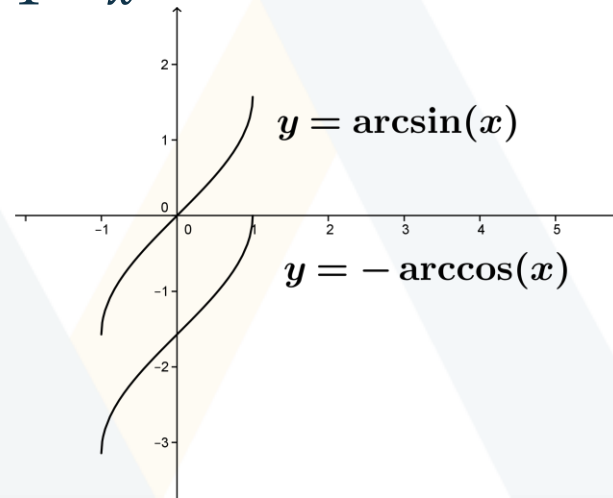
$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$$

Et les autres fonctions trigonométriques inverses?


$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Primitives
équivalentes

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$$



Et les autres fonctions trigonométriques inverses?

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$


$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Formules de base d'intégration

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

2. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$

3. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$

Exemple 3

$$\int \frac{5}{t^2 + 1} dt =$$

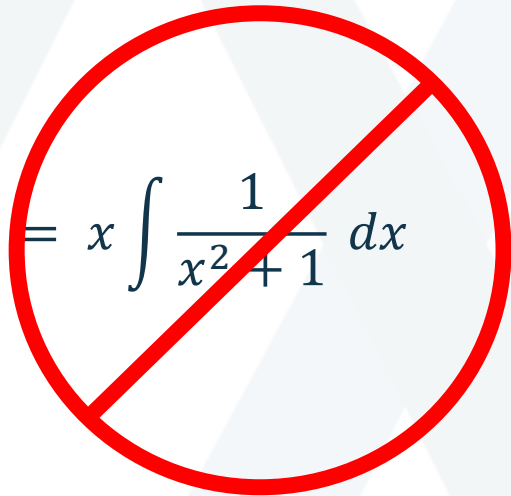
$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

où k est une constante réelle

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$$

Exemple 4

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx =$$


$$= x \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

où k est une **constante** réelle

Résumé

En inversant les formules de dérivation des fonctions trigonométriques, on obtient les six formules suivantes.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

Résumé

Pour les fonctions trigonométriques inverses, nous mémoriserons que trois formules, puisque les autres sont équivalentes.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

Résumé

Certaines fonctions trigonométriques, comme tangente, ne sont le résultat d'aucune formule de base de dérivation. Leur résolution demandera l'utilisation de nouvelles stratégies : les techniques d'intégration.

$$\int \tan x \, dx = ?$$

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca