Formules de base d'intégration des fonctions exponentielles et logarithmiques

Anik Soulière
Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

À la recherche de primitives

Intégrer

(trouver les primitives)

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

Dériver

Formules de base de dérivation

$$\frac{d}{dx} C = 0, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} x = 1$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Fonctions exponentielles

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \Longrightarrow \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad \Longrightarrow \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Si $a > 0$ et $a \neq 1$

Formules de base d'intégration

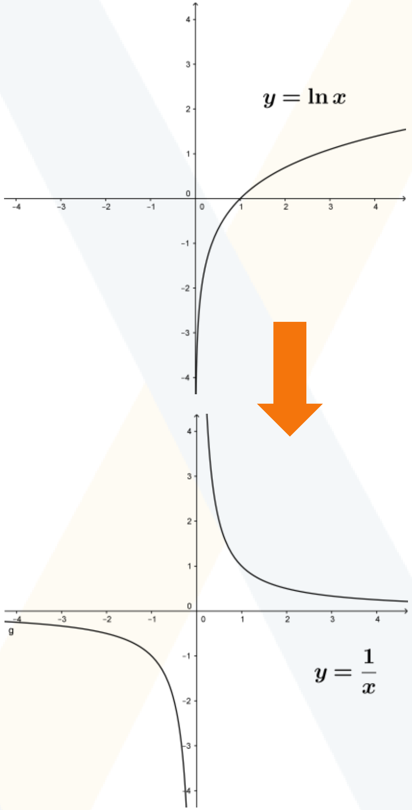
1. $\int e^x \, dx = e^x + C$

2. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ si $a > 0$ et $a \neq 1$

3. $\int \dfrac{1}{x} \, dx =$

Intégration d'une fonction logarithmique de base *e*

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \text{où } x > 0$$

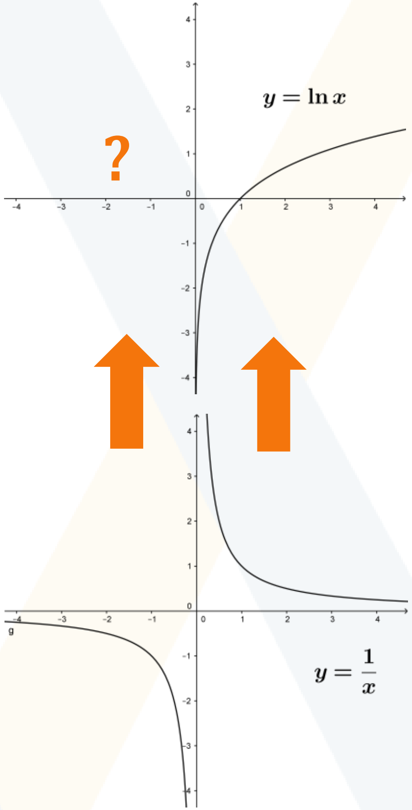


Intégration d'une fonction logarithmique de base *e*

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \text{où } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Preuve

Nous allons montrer que $\ln|x|$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si $x > 0$, $|x| = x$ et alors

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x$$
$$= \frac{1}{x}$$

Si $x < 0$, $|x| = -x$ et alors

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x)$$
$$= \frac{1}{(-x)}\frac{d}{dx}(-x)$$

Règle de dérivation en chaîne

$$= \frac{1}{(\cancel{-}x)}(\cancel{-}1)$$
$$= \frac{1}{x}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\ln|x|$ est bien une primitive de $\frac{1}{x}$.

Formules de base d'intégration

1. $$\int e^x \, dx = e^x + C$$

2. $$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \text{si } a > 0 \text{ et } a \neq 1$$

3. $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Exemple

$$\int 5^x \; dx =$$

$$\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

si $a > 0$ et $a \neq 1$

Formules de base de dérivation

$$\frac{d}{dx}C = 0, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Remarque

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Primitives équivalentes

$$\frac{d}{dx}\log_a|x| = \frac{1}{x\ln a} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln a \log_a|x| + C \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$= \cancel{\ln a}\,\frac{\ln|x|}{\cancel{\ln a}} + C$$

$$= \ln|x| + C$$

Formule de changement de base

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Remarque

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Mathéma-TIC

Résumé

En s'inspirant de formules de dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques, on a établi trois formules de base d'intégration.

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \text{pour } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Conception du contenu

Anik Soulière

Collège de Maisonneuve

asouliere@cmaisonneuve.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC