

Espaces propres et multiplicité géométrique

Karima Amoura

Chargée de cours

Département de mathématiques et de statistique

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)

du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Définition

Espace propre

Soit A une matrice carrée $n \times n$ et λ une valeur propre de A . L'espace propre de A associé à λ est donné par $E_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\} \neq \{\mathbf{0}\}$. C'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exemple 1

Déterminer les espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

$$\text{Pour } \lambda = 1, \text{ on a } (A - I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 2$, on a $(A - 2I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

Définition

Multiplicité géométrique

La multiplicité géométrique de la valeur propre λ de A , une matrice $n \times n$, est la dimension de l'espace propre $E_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$.

Exemple 2

Quelle est la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda = 5$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}?$$

$$(A - 5I)u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Résumé

- Définition d'un espace propre
- Exemple 1
- Définition de la multiplicité géométrique
- Exemple 2

Conception du contenu

Karima Amoura

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca