

# Base d'un espace vectoriel

## Christian Côté

Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal

[christian.cote@collanaud.qc.ca](mailto:christian.cote@collanaud.qc.ca)



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)

du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

## Exemple 1

Montrer que tout vecteur  $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$  et  $\mathbf{u}_2 = (-1, 1)$ .

# Définition

## Ensemble générateur

Un ensemble  $B$  de vecteurs de l'espace vectoriel  $V$  est un **ensemble générateur** de  $V$  si tout élément de  $V$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de  $B$ .

## Exemple 2

Montrer que  $\mathbf{u}_1 = (1,1)$  et  $\mathbf{u}_2 = (-1,1)$  sont linéairement indépendants.

# Définition

## Base d'un espace vectoriel

Un ensemble  $B$  de vecteurs de l'espace vectoriel  $V$  est une **base** de  $V$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- a) les vecteurs de  $B$  sont linéairement indépendants;
- b)  $B$  est un ensemble générateur de  $V$ .

## Exemple 3

Les vecteurs  $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 4)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 5, -1)$  et  $\mathbf{u}_3 = (1, 3, -2)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$ ?

a) Indépendance linéaire

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

## Exemple 3

b) Ensemble générateur:

$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = (x, y, z)$  possède une solution pour tout  $(x, y, z)$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & x \\ 3 & 5 & 3 & y \\ 4 & -1 & -2 & z \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-7x + y - 2z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 9x - y + 3z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-23x + 3y - 8z}{2} \end{array} \right)$$

## Exemple 4

Les vecteurs  $\mathbf{u}_1 = (1,2,3)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1,-1,1)$  et  $\mathbf{u}_3 = (1,3,7)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$ ?

a) Indépendance linéaire

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# Résumé

- Exemple 1
- Définition d'ensemble générateur
- Exemple 2
- Définition de base d'un espace vectoriel
- Exemple 3
- Exemple 4

Conception du contenu

**Christian Côté**

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Université de Montréal

christian.cote@collanaud.qc.ca

**Karima Amoura**

Révision du contenu

**Samuel Bernard et Véronique Hussin**

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**

Postproduction

**Symon Nestoruk**

Musique

**Sébastien Belleudy**

[sebe.bandcamp.com](http://sebe.bandcamp.com)

Conception graphique

**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX

**Nicolas Beauchemin**

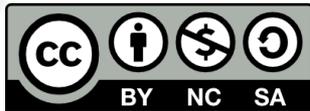
[nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca](mailto:nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca)

Production

**Samuel Bernard**



**Bruno Poellhuber**



**Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence**

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

**Mathema-TIC.ca**