

Calcul du déterminant avec opérations élémentaires sur les lignes

Christian Côté

Professeur de mathématique au Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

Chargé de cours au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal

christian.cote@collanaud.qc.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)

du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Question du jour

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Proposition

Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Question du jour

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

But de la vidéo

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix}$$

ou

$C \cdot$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Proposition

Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant

Soit A une matrice carrée. On a :

1.

2.

3.

Proposition

$$|A| \underset{L_i(k)}{=} |B|$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \underset{L_1(3)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Proposition

Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant

Soit A une matrice carrée. On a :

1.

2.

3.

Proposition

Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant

Soit A une matrice carrée. On a :

1. $|B| = k|A|$, où B est obtenue en multipliant une ligne de A par k ;
- 2.
- 3.

Proposition

$$|A| \stackrel{L_{ij}}{=} |B|$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{L_{12}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Proposition

Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant

Soit A une matrice carrée. On a :

1. $|B| = k|A|$, où B est obtenue en multipliant une ligne de A par k ;
- 2.
- 3.

Proposition

Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant

Soit A une matrice carrée. On a :

1. $|B| = k|A|$, où B est obtenue en multipliant une ligne de A par k ;
2. $|B| = -|A|$, où B est obtenue en échangeant deux lignes de A ;
- 3.

Proposition

$$|A| =_{L_{ij}(k)} |B|$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} =_{L_{21}(-2)} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Proposition

Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant

Soit A une matrice carrée. On a :

1. $|B| = k|A|$, où B est obtenue en multipliant une ligne de A par k ;
2. $|B| = -|A|$, où B est obtenue en échangeant deux lignes de A ;
- 3.

Proposition

Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant

Soit A une matrice carrée. On a :

1. $|B| = k|A|$, où B est obtenue en multipliant une ligne de A par k ;
2. $|B| = -|A|$, où B est obtenue en échangeant deux lignes de A ;
3. $|B| = |A|$, où B est obtenue en ajoutant à une ligne de A un multiple d'une autre ligne.

Proposition

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 9 \end{array} \right| \stackrel{L_1(3)}{=} \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right| \stackrel{L_{12}}{=} -\frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 9 & 1 \end{array} \right| \stackrel{L_{21}(-2)}{=} -\frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right|$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix}$$

=

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \underset{L_{12}}{-} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 14 & 7 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \underset{L_{21}(-4)}{-} \underset{L_{31}(-3)}{-} \underset{L_{41}(-2)}{-} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{=}{=} \underset{L_3(-1/3)}{-} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{=}{L_{12}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 14 & 7 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{=}{L_{21}(-4)} \stackrel{=}{L_{31}(-3)} \stackrel{=}{L_{41}(-2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{=}{L_3(-1/3)} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} \stackrel{=}{L_{43}(-5)} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -54$$

Résumé

- Déterminant d'une matrice triangulaire
- Effet des opérations élémentaires lignes sur le déterminant
- Calcul d'un déterminant avec les opérations élémentaires lignes

Conception du contenu

Christian Côté

Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne

christian.cote@collanaud.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca