

Méthode de Gauss

Infinité de solutions

Karima Amoura

Chargée de cours

Département de mathématiques et de statistique

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)

du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Financé à partir du budget d'intégration pédagogique (Université de Montréal et Syndicat des chargé(e)s de cours)

Exemple 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 \\ 3 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_{21}(-1) \\ (L_2 \rightarrow L_2 - L_1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_{32}(-3/2) \\ (L_3 \rightarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array} \right)$$

Définition

Méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer la matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée.

Proposition

Solutions d'un système d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires peut avoir :

1. une solution unique;
2. une infinité de solutions;
3. aucune solution.

Exemple 2

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 = -9 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -5 \\ 0x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 6 \end{cases} \quad (1)$$
$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 \\ 3 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right) & \longrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 = -9 \\ 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Le système (1) a pour solution $(x_1, x_2, x_3) = (2s + 3, 2 + 2s, s)$, où $s \in \mathbb{R}$.

Définition

Variables de base et variables libres

Les variables de base (principales) sont les inconnues aux positions des pivots dans la matrice échelonnée. Les autres variables sont les variables libres.

Exemple 3

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array} \right)$$

Exemple 3

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_{21}(-2) \\ (L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_{31}(-3) \\ (L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_{32}(-1/3) \\ (L_3 \rightarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array} \right)$$

Matrice augmentée échelonnée.

Exemple 3

Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array} \right)$$

(1)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -6x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases}$$

(2)

Exemple 3

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -3x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -6x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = -3t \\ x_5 = t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Le système (1) a pour solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2s, s, -3t, t)$, où s et t sont des réels.

Résumé

- Exemple 1
- Définition de la méthode de Gauss
- Proposition
- Exemple 2
- Définition des variables de base et des variables libres
- Exemple 3

Conception du contenu

Karima Amoura

Université de Montréal

amourak@dms.umontreal.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard et Véronique Hussin

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

hussin@dms.umontreal.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Marie-Ève Lanthier

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard



Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca