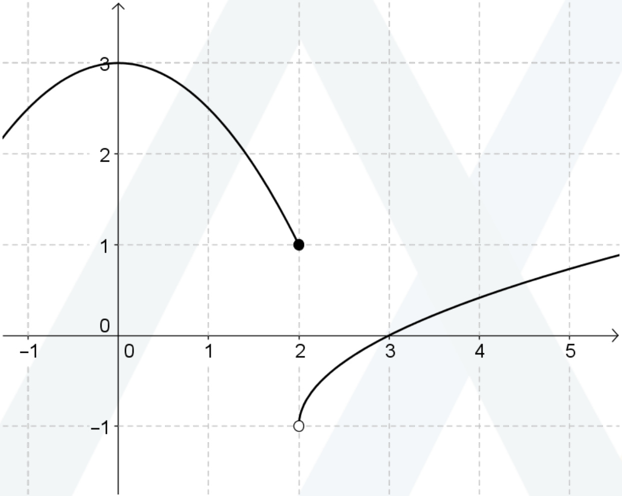
La limite à gauche et la limite à droite

Julie Tremblay

Professeure de mathématique
Département de mathématiques
Collège de Bois-de-Boulogne
julie.tremblay@bdeb.qc.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l’Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d’arrimage universités-collèges

Fonction définie par morceaux



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & x > 2 \end{cases}$$

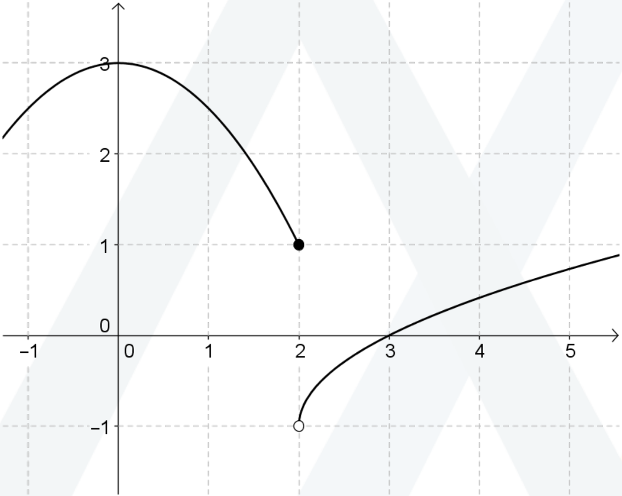
Définition

La limite d'une fonction en un point

La limite d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers une valeur a est égale à une **valeur unique** L, si la fonction $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de L lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, mais **différentes de $\boldsymbol{a}$**.
On écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Fonction définie par morceaux



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & x > 2 \end{cases}$$

Définitions

Limite à gauche et limite à droite

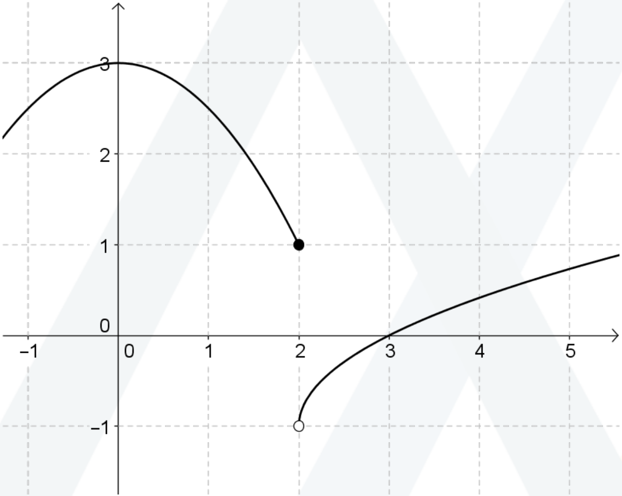
On dit que **la limite à gauche** d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers a par la gauche est égale à L si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de L lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, mais **inférieures** à a. On écrit alors

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

On dit que **la limite à droite** d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers a par la droite est égale à L si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de L lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, mais **supérieures** à a. On écrit alors

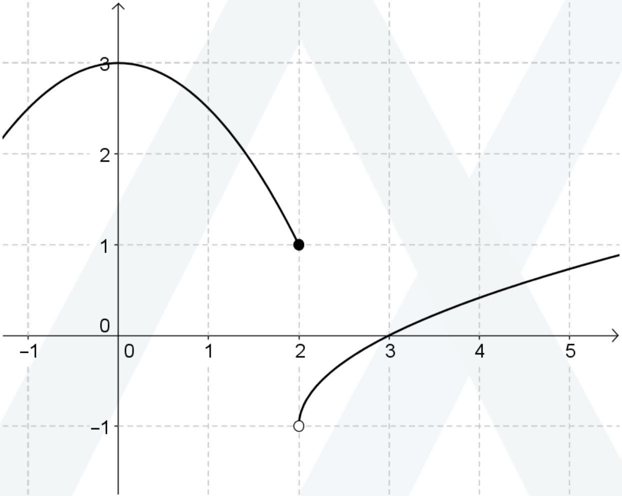
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Exemple 1



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & x > 2 \end{cases}$$

Exemple 1



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & x > 2 \end{cases}$$

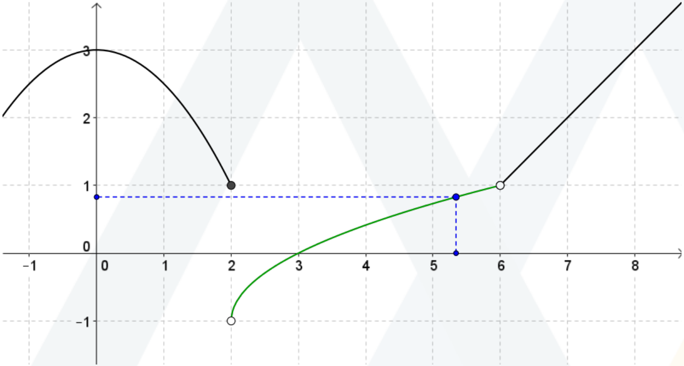
Théorème

Existence d'une limite

Soit a, un nombre réel ayant des voisins appartenant au domaine d'une fonction $f(x)$.

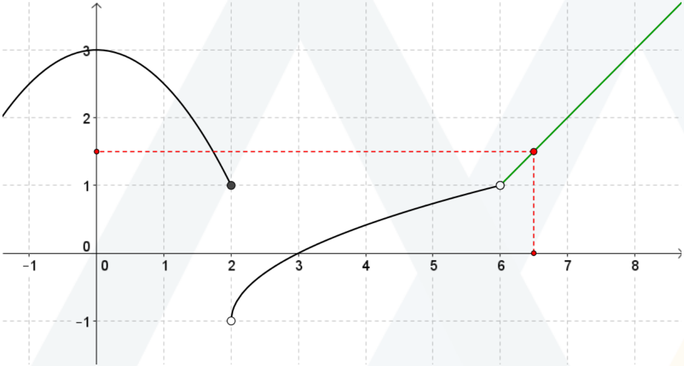
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L, \text{ où } L \in \mathbb{R}$$

Exemple 2



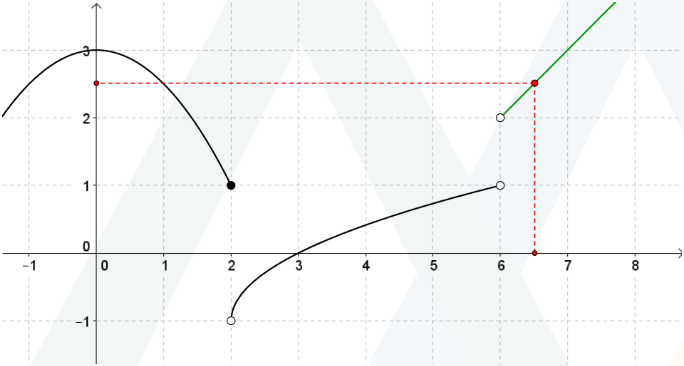
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & 2 < x < 6 \\ x - 5 & x > 6 \end{cases}$$

Exemple 2



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & 2 < x < 6 \\ x - 5 & x > 6 \end{cases}$$

Exemple 3



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} - 1 & 2 < x < 6 \\ x - 4 & x > 6 \end{cases}$$

Corollaire

Existence d'une limite

Soit a, un nombre réel ayant des voisins appartenant au domaine d’une fonction $f(x)$. Si les limites à gauche et à droite existent, mais sont différentes l’une de l’autre, alors on dira que la limite n’existe pas.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \nexists$$

Résumé

- On calcule la limite à gauche en s'approchant avec des valeurs de x inférieures à a, $x \to a^-$, et on calcule la limite à droite en s'approchant avec des valeurs de x supérieures à a, $x \to a^+$.

Résumé

- Si l'on obtient la même valeur de y lorsque l'on s'approche par la gauche de a et lorsque l'on s'approche par la droite de a, alors on peut dire que la limite **existe** et qu'elle est égale à cette même valeur de y.
- Par contre, si la limite à gauche est différente de la limite à droite, alors la limite n'existe pas.

Conception du contenu

Julie Tremblay
Collège de Bois-de-Boulogne
julie.tremblay@bdeb.qc.ca

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Mathéma-TIC

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL *de* LANAUDIÈRE *à* Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC