

Banque d'exercices en probabilités

Jean-Sébastien Turcotte
Professeur de mathématique
Regroupement de mathématiques
Cégep Gérard-Godin
js.turcotte@cgodin.qc.ca

22 juin 2016



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Questions | 1 |
| 1 Dénombrement | 1 |
| 1.1 Principes de dénombrement | 1 |
| 1.2 Permutations et Combinaisons | 1 |
| 2 Axiomes des probabilités | 5 |
| 2.1 Théorie des ensembles | 5 |
| 2.2 Axiomes des probabilités | 6 |
| 2.3 Calculs de probabilités | 7 |
| 3 Probabilité conditionnelle et indépendance | 9 |
| 3.1 Probabilité conditionnelle | 9 |
| 3.2 Indépendance | 13 |
| 4 Variables aléatoires discrètes | 18 |
| 4.1 Variables discrètes | 18 |
| 4.2 Espérance et moments | 21 |
| 5 Variables aléatoires continues | 25 |
| 5.1 Fonction de répartition | 25 |
| 5.2 Variables continues | 27 |
| 5.3 Espérance et moments | 29 |
| 6 Vecteurs aléatoires | 32 |
| 6.1 Lois conjointes | 32 |
| 6.2 Espérance et moments | 33 |
| 6.3 Indépendance | 34 |
| 6.4 Lois conditionnelles | 34 |
| 7 Propriétés de l'espérance | 36 |
| 7.1 Espérance conditionnelle | 36 |
| 7.2 Fonctions génératrices des moments | 36 |
| 7.3 Inégalités | 37 |
| 8 Théorèmes limites | 38 |
| 8.1 Lois des grands nombres | 38 |
| 8.2 Approximation poissonnienne | 38 |

| | | |
|------------------|---|------------|
| 8.3 | Théorème central limite | 38 |
| Solutions | | 39 |
| 1 | Dénombrement | 39 |
| 1.1 | Principes de dénombrement | 39 |
| 1.2 | Permutations et Combinaisons | 41 |
| 2 | Axiomes des probabilités | 51 |
| 2.1 | Théorie des ensembles | 51 |
| 2.2 | Axiomes des probabilités | 54 |
| 2.3 | Calculs de probabilités | 58 |
| 3 | Probabilité conditionnelle et indépendance | 63 |
| 3.1 | Probabilité conditionnelle | 63 |
| 3.2 | Indépendance | 75 |
| 4 | Variables aléatoires discrètes | 87 |
| 4.1 | Variables discrètes | 87 |
| 4.2 | Espérance et moments | 98 |
| 5 | Variables aléatoires continues | 106 |
| 5.1 | Fonction de répartition | 106 |
| 5.2 | Variables continues | 112 |
| 5.3 | Espérance et moments | 122 |
| 6 | Vecteurs aléatoires | 131 |
| 6.1 | Lois conjointes | 131 |
| 6.2 | Espérance et moments | 135 |
| 6.3 | Indépendance | 135 |
| 6.4 | Lois conditionnelles | 137 |
| 7 | Propriétés de l'espérance | 143 |
| 7.1 | Espérance conditionnelle | 143 |
| 7.2 | Fonctions génératrices des moments | 144 |
| 7.3 | Inégalités | 147 |
| 8 | Théorèmes limites | 148 |
| 8.1 | Lois des grands nombres | 148 |
| 8.2 | Approximation poissonienne | 148 |
| 8.3 | Théorème central limite | 149 |

Questions

1 Dénombrement

1.1 Principes de dénombrement

Exercice 1 Solution

On considère 10 lancers d'une pièce de monnaie.

- Combien de séquences de 10 lancers y a-t-il ?
- Combien de séquences ont leur premier pile à la quatrième position ?
- Combien de séquences ont exactement 1 pile ?

Exercice 2 Solution

On considère l'ensemble des nombres $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

- Combien y a-t-il de fonctions de S vers $\{0, 1\}$?
- Combien y a-t-il de fonctions de S vers S ?
- Combien de ces fonctions de S vers S sont injectives ?
- Combien y a-t-il de fonctions surjectives ?

Exercice 3 Solution

Considérer l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à six faces à deux reprises.

- Exprimer l'ensemble fondamental S de cette expérience en mots et en notation mathématique. Quel est le cardinal de S ?
- Exprimer le sous-ensemble S_{10} de S correspondant aux lancers dont la somme est supérieure ou égale à 10 à l'aide de la notation mathématique et trouver la cardinalité de S_{10} .
- On considère R le sous-ensemble de S correspondant aux paires de lancers dont le premier résultat est strictement supérieur au second. Exprimer R en notation mathématique et trouver sa cardinalité.

1.2 Permutations et Combinaisons

Exercice 4 Solution

La prochaine question vise à dénombrer les différentes manières d'obtenir les mains de poker. On peut regarder ce [lien](#) pour des exemples des différentes mains. On précise qu'une suite peut commencer ou se terminer avec l'As (par exemple A-2-3-4-5 est une suite, tout comme 10-J-Q-K-A). Dans ce qui suit, par « couleur » d'une carte, on entend coeur, pique, carreau ou trèfle, et non pas rouge ou noire.

- (a) Combien y a-t-il de mains possibles au poker 5 cartes ?
- (b) La meilleure main possible est la « straight flush », ou encore la quinte. Combien de quintes possibles y a-t-il ?
- (c) La seconde main en puissance est le « four of a kind », ou encore le carré. C'est une main contenant 4 cartes de la même valeur et une autre carte quelconque. Combien y a-t-il de carrés possibles ?
- (d) La main suivante est la « full house », ou encore la main pleine, qui consiste en un trio de cartes de la même valeur, ainsi qu'une paire, d'une valeur différente évidemment. Combien y a-t-il de mains pleines au poker ?
- (e) La main suivante est la « flush », ou encore la main de couleur. Elle consiste en 5 cartes de la même couleur. Combien y a-t-il de mains possibles de couleur ?
- (f) La prochaine main est la « straight », ou encore la suite. C'est une main qui consiste en 5 cartes consécutives. Combien y a-t-il de suites possibles ?
- (g) La prochaine main est le « three of a kind », ou encore le brelan. Elle consiste en un trio de cartes de la même valeur et deux autres cartes, de valeur différente du trio et de valeurs différentes entre elles. Combien y a-t-il de brelans possibles ?
- (h) La main suivante est la double paire, qui contient à deux paires différentes et une cinquième carte qui ne donne pas une main pleine. Combien de doubles paires y a-t-il ?
- (i) L'avant-dernière main consiste en une paire et trois cartes qui ne formeront pas une main pleine. Combien y a-t-il de paires possibles ?
- (j) La dernière main, la plus faible, est la « high card » ou encore carte haute, qui consiste à avoir 5 cartes différentes ne formant ni une suite, ni une couleur. Combien de ces mains y a-t-il ?

Exercice 5 Solution

Démontrer l'identité suivante en utilisant un argument combinatoire :

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = 2 \binom{n+2}{3}.$$

Indice : Considérer trois tiges, l'une plus longue et les deux autres de même longueur. Vous devez insérer chaque tige dans l'un des $n+2$ endroits possibles. Il y a une restriction sur le positionnement de la plus longue tige !

Exercice 6 Solution

Démontrer l'identité suivante en donnant un argument combinatoire :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Indice : Considérer la formation d'un comité de taille quelconque avec un président. Le comité est formé à partir d'un groupe de n personnes.

Exercice 7 Solution

Aux Jeux olympiques de Sotchi en 2014, il y avait douze skieurs à la finale des bosses. Nous comptons 4 Canadiens, 2 Américains, 2 Russes et 4 skieurs de nationalités toutes différentes.

- Combien de *podiums* possibles y avait-il ?
- De ces podiums, combien comptent exactement 2 Canadiens ?
- Combien de podiums comptent au moins 1 Canadien parmi ses membres ?
- Combien de podiums ont un Canadien en première position et un Canadien en deuxième position ?
- Combien de podiums comptent deux skieurs d'une même nationalité en première et en deuxième position ?

Exercice 8 Solution

Nous jouons au Scrabble. Nous avons tiré les lettres $\{P, R, O, B, A, B, I\}$. On considère S , l'ensemble des arrangements ordonnés de $\{P, R, O, B, A, B, I\}$.

- Quelle est la cardinalité de S ?
- Combien de ces arrangements ordonnés ont la lettre B comme première lettre ?

Nous considérons A , l'ensemble des arrangements ordonnés de $\{P, R, O, B, A, B, I\}$ de six lettres contenant exactement deux voyelles.

- Pour commencer, calculer le nombre de positions possibles pour deux voyelles distinctes données dans un mot de 6 lettres.
- Déduire de la question précédente la cardinalité de A .

Exercice 9 Solution

Une urne contient 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. De plus, les boules sont numérotées de 1 à 10.

- Nous tirons **trois boules** de l'urne **SANS remise**. (L'ordre du tirage n'est pas important, ainsi le tirage $1 - 4 - 7$ est le même que $1 - 7 - 4, 4 - 7 - 1$, etc.)
 - Soit A l'ensemble *exactement deux boules tirées sont rouges*. Trouver $\#A$.
 - Soit C l'ensemble *aucune blanche n'est tirée*. Trouver $\#C$.
 - Combien de tirages ne contenant pas de boule blanche contiennent exactement 2 boules rouges ?
- Nous tirons **trois boules** de l'urne **SANS remise**. (L'ordre du tirage **EST** maintenant important.)

- i. Soit A l'ensemble *exactement deux boules tirées sont rouges*. Trouver $\#A$.
- ii. Soit C l'ensemble *aucune blanche n'est tirée*. Trouver $\#C$.
- iii. Combien de tirages ne contenant pas de boule blanche contiennent exactement 2 boules rouges ?

Exercice 10**Solution**

Dans la Ligue nationale de hockey, une série éliminatoire entre deux équipes se joue au meilleur des sept matchs, c'est-à-dire qu'il faut remporter 4 victoires pour gagner la série et qu'il peut y avoir jusqu'à sept matchs. Considérons une série entre les Canadiens de Montréal et les Bruins de Boston. Combien y a-t-il de dénouements possibles ? (Par exemple, MMBMBM est une série possible, tout comme MBMBMBM.) (Défi : trouver la formule générale pour une série au meilleur des $2n + 1$ parties.)

Exercice 11**Solution**

Si on place une tour dans la case inférieure gauche d'un échiquier standard, de combien de manières différentes peut-elle se rendre au coin supérieur droit si elle ne fait que se déplacer vers la droite ou vers la gauche ? *Remarque : un échiquier est une planche composée de 8×8 cases*. Généraliser le résultat à un échiquier $m \times n$.

2 Axiomes des probabilités

2.1 Théorie des ensembles

Exercice 12 **Solution**

On considère l'ensemble de nombres $N_{100} = \{1, 2, \dots, 99, 100\}$. En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, calculer la somme des nombres dans N_{100} qui ne sont pas divisibles par 3 ni par 5.

Rappel : La somme des n premiers nombres est donnée par

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 13 **Solution**

On considère 3 sous-ensembles A, B et C d'un ensemble S quelconque. Écrire une expression en fonction de A, B, C et en utilisant les opérations sur les ensembles pour décrire l'ensemble des éléments

- (a) qui sont uniquement dans A ;
- (b) qui sont dans A et dans C , mais pas dans B ;
- (c) qui font partie d'au moins un des ensembles A, B ou C ;
- (d) qui font partie d'au moins deux des ensembles A, B et C ;
- (e) qui sont à la fois dans A, B et C ;
- (f) qui ne sont pas dans A , ni dans B ni dans C ;
- (g) qui sont dans un seul des ensembles A, B ou C ;
- (h) qui sont dans *au plus* deux des ensembles A, B et C .

Exercice 14 **Solution**

Considérer l'équation

$$x + y + z = 20,$$

où $0 \leq x, y, z$ sont des nombres entiers.

- (a) Combien de solutions possibles existe-t-il ?
- (b) Combien de ces solutions ont $x \leq 3$?
- (c) Combien de solutions possibles existe-t-il au problème

$$x + y + z = 20, x \leq 3, y \leq 5?$$

2.2 Axiomes des probabilités

Exercice 15 Solution

Soit A l'événement *il y aura accumulation de neige samedi* et B l'événement *il y aura accumulation de neige dimanche*. Si $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et que $\mathbb{P}(B) = 0,7$,

- À l'aide des axiomes des probabilités, calculer un minorant à la probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$, la probabilité qu'il neige samedi et dimanche.
- Appliquer un argument par induction pour obtenir l'inégalité à n événements :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - (n - 1).$$

Exercice 16 Solution

En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, démontrer que si on distribue aléatoirement (de manière équiprobable) n billes numérotées de 1 à n dans r urnes aussi numérotées, la probabilité qu'il n'y ait pas d'urne vide est

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} (-1)^k (r - k)^n}{r^n}.$$

Exercice 17 Solution

30 % des étudiants du cours *Probabilités* suivent le cours d'*Analyse*, 40 % suivent le cours de *Statistique* et 50 % ne suivent aucun des deux. Si nous choisissons un étudiant du cours de *Probabilités* de manière équiprobable, trouver

- la probabilité que l'étudiant suive le cours d'*Analyse* OU de *Statistique* ;
- la probabilité que l'étudiant suive le cours d'*Analyse* ET de *Statistique*.

Exercice 18 Solution

À l'université, il est possible de participer à du soutien pour les cours de probabilités, d'algèbre linéaire et de calcul I. Il y a 100 étudiants qui sont inscrits dans ces trois cours. On compte 28 étudiants qui suivent le soutien en probabilités, 26 qui le suivent en algèbre linéaire et 16 font le soutien en calcul I. Également, 12 étudiants suivent simultanément le soutien en probabilités et en algèbre linéaire, 4 suivent le soutien en probabilités et en calcul et 6 qui suivent le soutien en algèbre linéaire et en calcul. Finalement 2 étudiants qui suivent les trois soutiens.

- Parmi les 100 élèves suivant simultanément les trois cours, quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ne suive aucun cours de soutien ?
- Si un étudiant est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il suive exactement un cours ?

Exercice 19 Solution

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble S quelconque. On note par $A\Delta B$ l'ensemble

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

appelé la différence symétrique.

- Décrire en mots l'ensemble $A\Delta B$.
- Écrire $\mathbb{P}(A\Delta B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 20 Solution

Soient \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 des probabilités sur un même espace S . Pour chacune des situations suivantes, montrer que \mathcal{P} est une probabilité ou donner un contre-exemple à l'un des axiomes, selon le cas.

- $\mathcal{P}(E) = (\mathbb{P}_1(E) + \mathbb{P}_2(E))/2$ pour tout E dans S .
- $\mathcal{P}(E) = (\mathbb{P}_1(E))^2$ pour chaque E dans S .

2.3 Calculs de probabilités

Exercice 21 Solution

Une urne contient des billes numérotées de 1 à 20. On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on tire une bille étant un multiple de 5. On effectue par la suite un dernier tirage. Soit N le numéro de la bille tirée. Quelle est la plus grande probabilité, $\mathbb{P}(N = 15)$ ou $\mathbb{P}(N = 13)$? Pourquoi?

Exercice 22 Solution

Une urne contient 10 boules : 9 noires et 1 blanche. Nous pigeons deux boules sans remise de l'urne. (Nous supposons que les tirages sont équiprobables.)

- Soit A l'événement *deux boules noires sont tirées* et B l'événement *une boule blanche est tirée*. Trouver $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.
- Nous répétons un tirage de deux boules comme ci-dessus en remettant les deux boules après chaque tirage. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit E_n l'événement *le n -ième tirage est le premier où une boule blanche est tirée*. Trouver $\mathbb{P}(E_n)$ et $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$.

Exercice 23 Solution

Vous participez à un jeu télévisé, à l'étape finale. Voici les règles du jeu : devant vous se trouvent trois boîtes. Deux de celles-ci ne contiennent rien et l'autre contient le gros lot. L'animateur connaît le contenu des boîtes, il sait donc dans laquelle se trouve le gros lot. Il vous demande de choisir une boîte, et par la suite, il éliminera l'une des deux autres boîtes, qui ne contient pas le gros lot. Il vous demande ensuite de choisir entre votre boîte et la boîte restante. Quelle boîte devriez-vous choisir? Expliquez pourquoi.

Exercice 24 Solution

Aux Jeux olympiques de Sotchi, il y a douze skieurs à la finale des bosses. Nous comptons 4 Canadiens, 2 Américains, 2 Russes et 4 skieurs de nationalités toutes différentes.

Nous estimons que les classements finaux des skieurs sont équiprobables. à partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

- (a) Montrer que la probabilité de l'événement *exactement deux skieurs sur les trois premiers sont canadiens* est $12/55$.
- (b) Montrer que la probabilité de l'événement *au moins un skieur canadien est parmi les trois premiers* est $41/55$.
- (c) Calculer la probabilité que deux skieurs canadiens se classent premier et deuxième.
- (d) Votre collègue prétend que comme il y a 4 Canadiens, 2 Américains et 2 Russes, la probabilité que les deux premiers skieurs soient canadiens sachant que les deux premiers skieurs ont la même nationalité est $1/2$. Calculer cette probabilité pour déterminer si votre collègue a suivi MAT-1720 ou non.

Exercice 25 Solution

Une marche aléatoire simple est un processus débutant à $(0, 0)$ au temps 0. À chaque unité de temps, le processus augmente d'une unité avec probabilité $1/2$ ou diminue d'une unité avec probabilité $1/2$. Calculer la probabilité que le processus soit à 0 au temps n .

3 Probabilité conditionnelle et indépendance

3.1 Probabilité conditionnelle

Exercice 26

Solution

Soit \mathbb{P} une probabilité sur un espace S . Soit B un événement de cet espace tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrer que pour tout événement A , la probabilité conditionnelle de A sachant B ,

$$Q_B(A) = \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilité sur S , c'est-à-dire qu'elle satisfait aux trois axiomes d'une probabilité.

Exercice 27

Solution

Un étudiant en actuariat doit passer des examens professionnels afin d'être reconnu par la « Society of actuaries (SOA) ». Supposons que la passation d'un examen est conditionnelle à la réussite de l'examen précédent. On estime qu'un étudiant qui a fait le cours de probabilité MAT-1720 a 90 % des chances de passer le premier examen. Conditionnellement au succès du premier, il a 75 % des chances de réussir le second et conditionnellement au succès des deux premiers, il a 65 % des chances d'en réussir un troisième.

- Quelle est la probabilité qu'un étudiant réussisse les trois premiers examens ?
- Sachant qu'il échouera un des examens, calculer la probabilité que cet examen soit le deuxième.

Exercice 28

Solution

Une étude faite par un institut statistique révèle les données suivantes sur le nombre d'heures moyen passées sur le Web chaque semaine par les jeunes de 12 à 24 ans durant l'année 2009. Voici les résultats :

| Nombre d'heures par semaine | Nombre de jeunes | | Total |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|-------|
| | Jeunes de 12-17 ans | Jeunes de 18-24 ans | |
| 0 à 10 heures | 983 | 951 | 1934 |
| 11 à 20 heures | 731 | 869 | 1600 |
| 21 heures ou plus | 570 | 896 | 1466 |
| Total | 2284 | 2716 | 5000 |

TABLEAU 1 – Nombre d'heures passées sur le Web par des jeunes de 12 – 24 ans

Une personne est choisie au hasard parmi les 5000 répondants au sondage.

- (a) Quelle est la probabilité que le jeune passe entre 11 et 20 heures sur le Web par semaine ?
- (b) Calculer la probabilité conditionnelle qu'il passe 21 heures ou plus par semaine sur le Web, sachant qu'il a entre 12 et 17 ans ?
- (c) Calculer la probabilité conditionnelle qu'il ait entre 12 et 17 ans, sachant qu'il passe entre 11 et 20 heures par semaine sur le Web ?

Exercice 29**Solution**

On reprend la situation de l'exercice 21 qui s'énonce comme suit : une urne contient des billes numérotées de 1 à 20. On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on tire une bille étant un multiple de 5. On effectue par la suite un dernier tirage. Soit N le numéro de la bille tirée.

Sachant que le premier multiple de 5 sort au 8^e tirage, quelle est la probabilité conditionnelle que la prochaine bille soit

- (a) la bille numéro 15 ?
- (b) la bille numéro 13 ?

Exercice 30**Solution**

Un magicien de rue a en sa possession deux pièces de monnaie, l'une parfaitement normale et l'autre ayant deux côtés pile. Lors de sa prestation, il sélectionne une pièce au hasard et il la lance.

- (a) La pièce montre pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce normale qui a été utilisée ?
- (b) Il jette la même pièce et obtient une seconde fois le côté pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce normale ? Qu'en est-il s'il obtient n fois le côté pile avec cette pièce ? Exprimer la probabilité en fonction du nombre de piles consécutives.
- (c) Au 42^e tir avec cette même pièce, il obtient face. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce normale ?

Exercice 31**Solution**

Lors du gala de remise des trophées dans la Ligue nationale de hockey, il y avait un prix spécial remis au joueur qui allait figurer sur le boîtier du jeu NHL15. Les trois candidats pour ce prix étaient P.K. Subban, Patrice Bergeron et Drew Doughty. On suppose que chaque joueur a autant de chance de remporter l'honneur. P.K. demande en coulisse à l'animateur du gala de lui révéler le nom de l'un de ses adversaires au concours (au hasard si P.K. est gagnant) qui ne remportera pas le prix. Il explique qu'il n'y a pas de problème, puisqu'il sait déjà qu'au moins un des deux ne sera pas sur le boîtier. L'animateur lui, refuse, prétendant que les chances de gagner de P.K. Subban passeront de 1 sur 3 à 1 sur 2, car il saura maintenant qu'il est parmi les deux finalistes. Qui a raison ?

Exercice 32 Solution

On dispose de 6 urnes numérotées contenant des billes. L'urne numéro i contient i billes blanches et $6 - i$ billes noires. On pige une bille dans une urne sélectionnée au hasard et on obtient une bille blanche. Quelle est la probabilité que la bille provienne de l'urne 3?

Exercice 33 Solution

Après avoir donné un test diagnostique à ses étudiants, un enseignant classe ceux-ci dans trois catégories, selon le risque d'échec du cours. On estime que les personnes à faible risque d'échec ont une probabilité de 0,1 d'échouer, ceux à moyen risque ont une probabilité de 0,15 et ceux à haut risque ont une probabilité de 0,35. Après son test, l'enseignant constate que 25 % de sa classe est à faible risque, 60 % est à moyen risque et 15 % à haut risque.

- Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard échoue le cours ?
- Si un élève choisi au hasard réussit le cours, quelle est la probabilité qu'il fasse partie des élèves à haut risque ? À moyen risque ? À faible risque ?

Exercice 34 Solution

Une compagnie d'assurance-santé répartit la population en trois catégories : A , les gens à faible risque de maladie ; B , les gens à risque moyen de maladie ; C , les gens à haut risque de maladie.

La compagnie estime que $2/10$ de la population est dans la catégorie A , $5/10$ dans la catégorie B et $3/10$ dans la catégorie C . De plus, elle estime que les chances de tomber malade dans la prochaine année sont de 5% pour une personne de A , 10 % pour une personne de B et 20 % pour une personne de C .

Nous choisissons une personne au hasard dans la population.

- Soit E l'événement *la personne choisie tombe malade durant la prochaine année*. Trouver $\mathbb{P}(E)$ (**Réduire votre réponse pour la question suivante.**)
- Si la personne choisie tombe malade durant la prochaine année, quelle est la probabilité qu'elle soit à faible risque, c'est-à-dire dans la catégorie A ?

Exercice 35 Solution

Une urne contient 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. Nous tirons **trois boules** de l'urne **SANS remise**. (Les boules d'une même couleur sont indiscernables.)

- Soit A l'événement *exactement deux boules tirées sont rouges*. Trouver $\mathbb{P}(A)$.
- Soit C l'événement *aucune blanche n'est tirée*. Trouver $\mathbb{P}(C)$.
- Montrer que la probabilité qu'exactement deux boules tirées soient rouges sachant qu'aucune blanche n'a été tirée, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A|C)$, est $\frac{3}{7}$.

Exercice 36 Solution

Au département de mathématiques, 60 % des étudiants sont inscrits au baccalauréat, 30 % à la maîtrise et 10 % au doctorat.

Nous savons que 50 % des étudiants inscrits au baccalauréat finissent leurs études en 3 ans et 50 % les finissent en 4 ans. À la maîtrise, $\frac{2}{3}$ des étudiants finissent leurs études en 2 ans et $\frac{1}{3}$ en 3 ans. Enfin, au doctorat, $\frac{1}{4}$ des étudiants finissent en 3 ans, la moitié finit en 4 ans et $\frac{1}{4}$ en 5 ans.

Nous choisissons un étudiant au hasard dans le département et considérons les événements

$$B = \{\text{l'étudiant choisi est au bacc.}\}$$

$$M = \{\text{l'étudiant choisi est à la maîtrise}\}$$

$$D = \{\text{l'étudiant choisi est au doctorat}\}.$$

(a) Soit A_3 l'événement $\{\text{l'étudiant termine ses études en 3 ans}\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_3)$.

(b) Calculer $\mathbb{P}(B|A_3)$, $\mathbb{P}(M|A_3)$, et $\mathbb{P}(D|A_3)$.

Exercice 37

Solution

Nous avons deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 10 boules : 6 blanches et 4 noires. L'urne U_2 contient 10 boules : 4 blanches et 6 noires. Nous tirons **une seule boule** : avec probabilité $\frac{3}{5}$ nous la tirons de l'urne U_1 . Avec probabilité $\frac{2}{5}$, nous la tirons de l'urne U_2 . Trouver

(a) La probabilité conditionnelle de l'événement *la boule tirée est blanche* sachant que *la boule est tirée de l'urne U_1* .

(b) La probabilité de l'événement *la boule est tirée de U_1 et est blanche*.

(c) La probabilité de l'événement *la boule tirée provient de l'urne U_1* sachant que la boule tirée est blanche.

Exercice 38

Solution

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 blanches. Nous pigeons de l'urne les 10 boules sans remise.

(a) Combien y a-t-il de tirages avec une boule blanche à la i -ème position pour i donné ?

(b) Calculer $\mathbb{P}(B_i)$ où B_i est l'événement *la i -ème boule est blanche*.

(c) Trouver $\mathbb{P}(B_4|B_2)$.

Exercice 39

Solution

Le Craps est un jeu de dés populaire dans les casinos. Une partie se déroule de la manière suivante :

1. Le joueur lance deux dés.

– Si la somme des dés est 7 ou 11, le joueur gagne et le jeu se termine.

– Si la somme des dés est 2, 3 ou 12, il fait Craps, il perd et le jeu se termine.

2. Si la somme est 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, la somme est prise en note et le jeu continue. Le joueur lance alors les dés jusqu'à l'obtention
- d'une somme de 7, auquel cas il perd et le jeu est terminé ;
 - d'une somme égale à la somme notée, auquel cas il gagne et le jeu est terminé.

Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne sa partie de Craps ?

3.2 Indépendance

Exercice 40

Solution

Supposons que la probabilité d'accoucher d'un garçon est la même que celle d'accoucher d'une fille, indépendamment d'une grossesse à une autre. Une famille a eu deux enfants.

- (a) Si l'un des enfants est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?
- (b) Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant que l'aînée est une fille ?

Exercice 41

Solution

Aux Jeux olympiques de Sotchi, au patinage artistique, les juges russes, américains et canadiens décernent une note à chaque patineur. Nous considérons les événements suivants.

$$R = \{\text{le juge russe donne une note parfaite au patineur}\}$$

$$C = \{\text{le juge canadien donne une note parfaite au patineur}\}$$

$$A = \{\text{le juge américain donne une note parfaite au patineur}\}$$

En téléspectateur averti, nous avons observé qu'un patineur n'obtient jamais trois notes parfaites. De plus, la probabilité qu'il n'y ait aucune note parfaite pour un même patineur est de $1/2$. Finalement, la probabilité de donner une note parfaite est la même pour chaque juge : $1/4$.

à partir de ces informations, répondez aux questions suivantes :

- (a) Exprimez l'événement *le patineur n'obtient aucune note parfaite* en termes des événements ci-dessus. En déduire la probabilité de l'événement *le patineur obtient au moins une note parfaite*.
- (b) Nous savons que l'événement C est indépendant de A et C est indépendant de R (le juge étant canadien !). à l'aide de ces informations et de la question précédente, calculer $\mathbb{P}(A \cap R)$. Déterminer si A est indépendant de R .
- (c) Nous avons aussi observé que si le patineur est américain, alors la probabilité que les juges russes et américains donnent tous deux une note parfaite est $1/4$. Si le patineur n'est pas américain, cette probabilité tombe à $1/16$. Déterminer la probabilité qu'un patineur soit américain.

Exercice 42
Solution

Toujours aux Olympiques de Sotchi, pour un match donné, l'équipe canadienne de hockey compte un nombre aléatoire de buts. Soit C_k l'événement

$$\{\text{le Canada compte } k \text{ buts}\}$$

pour $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, nous avons observé que

$$\mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

L'équipe adverse compte aussi un nombre aléatoire de buts. Soit A_j l'événement

$$\{\text{l'adversaire compte } j \text{ buts}\}$$

pour $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, nous avons observé que

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{2}{3^{j+1}}.$$

Les événements A_j et C_k sont indépendants pour tous j et k .

- Exprimer l'événement $E = \{\text{le match se termine avec un score égal}\}$ en termes des événements $(A_j, j \geq 0)$ et $(C_k, k \geq 0)$. Calculer $\mathbb{P}(E)$ en justifiant à l'aide des axiomes des probabilités et les hypothèses.
- Exprimer l'événement $B_n = \{\text{le Canada compte } n \text{ buts ou plus}\}$ en fonction des (C_k) . Calculer $\mathbb{P}(B_n)$. à l'aide de ce résultat et des propriétés d'une probabilité, démontrer que la probabilité de l'événement

$$\{\text{le Canada compte un nombre infini de buts}\}$$

est 0.

- Exprimer l'événement

$$M = \{\text{le Canada compte plus de buts que l'adversaire}\}$$

en fonction de $(A_j, j \geq 0)$ et $(C_k, k \geq 0)$. Calculer $\mathbb{P}(M)$.

Exercice 43
Solution

Nous considérons encore une urne contenant 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. Pour cette question, nous effectuons une suite infinie de tirages consécutifs **AVEC remise**. Les tirages sont indépendants.

- Soit A l'événement *exactement deux blanches sont tirées dans les trois premiers tirages*. Trouvez $\mathbb{P}(A)$.

- (b) On définit pour chaque $i = 1, 2, 3, \dots$ les événements R_i la i -ème boule tirée est rouge, N_i , la i -ème boule tirée est noire, et B_i , la i -ème boule tirée est blanche. Pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on considère C_n l'événement la n -ème boule tirée est blanche et les $n - 1$ premières sont noires.
- Exprimer C_n en fonction des événements R_i , B_i et N_i , $i = 1, 2, \dots$
 - Montrer que $\mathbb{P}(C_n) = \frac{2^{n-1}}{5^n}$.
- (c) Soit D l'événement une boule blanche est tirée avant une rouge.
- Exprimez l'événement D en fonction des événements C_n .
 - Montrez que $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{3}$.

Exercice 44 Solution

Soit A et B deux événements disjoints, de probabilité strictement positive. Montrer que A et B sont nécessairement dépendants.

Exercice 45 Solution

Soit A et B deux événements indépendants. Montrer que

- les événements A et B^c sont aussi indépendants ;
- les événements A^c et B^c sont indépendants.

Exercice 46 Solution

Donner un exemple d'événements A, B et C qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne sont pas indépendants.

Exercice 47 Solution

Donner un exemple d'événements A, B et C tels que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C),$$

mais qui ne sont pas indépendants.

Exercice 48 Solution

Démontrer ou infirmer l'affirmation suivante : soit A un événement qui est indépendant d'un événement B et C un événement qui est aussi indépendant de B . Alors, A est indépendant de C .

Exercice 49 Solution

Si quelqu'un vous propose de jouer à pile ou face contre lui, comment être certain que la pièce utilisée est bien équilibrée ? Voici une expérience qui assure aux deux joueurs une probabilité de gagner de 0,5.

On dispose d'une pièce qui tombe sur face avec probabilité p , inconnue.

- On lance la pièce et on note le résultat.

2. On lance la pièce une seconde fois et on note le résultat.
3. Si on a obtenu face-face ou encore pile-pile, on oublie tout et on recommence au début.
4. Lorsque le résultat est face-pile ou pile-face, on prend le dernier des deux tirs comme résultat de l'expérience.

Montrer que la probabilité d'avoir face avec cette expérience est de $0,5$, peu importe la valeur de p .

Exercice 50

Solution

Un modèle simplifié pour prédire la transmission de caractères génétiques consiste à regarder les gènes qui transmettent un caractère donné (couleur des yeux, des cheveux, maladies génétiques, etc.) et de regarder s'ils sont dominants ou récessifs. Supposons que la couleur des yeux ne peut être que bleue ou brune. Notons le gène qui donne la couleur brune B et celui qui donne la couleur bleue b . On dit également que le gène b est récessif, c'est-à-dire qu'il doit venir en deux exemplaires pour qu'un individu ait les yeux bleus. Quelqu'un ayant les gènes Bb sera dit porteur, mais la couleur de ses yeux sera brune. Lorsqu'un couple a un enfant, chaque parent transmet l'un de ses deux gènes à l'enfant. Considérons un couple composé d'un homme Bb et d'une femme Bb . Le couple a un garçon.

- (a) Quelle est la probabilité que l'enfant ait les yeux bleus ?
- (b) Supposons maintenant que ce garçon a les yeux bruns et qu'il a à son tour un enfant avec une femme *porteuse*. Quelle est la probabilité que leur enfant ait les yeux bleus ?
- (c) Quelle est la probabilité qu'un deuxième enfant de ce couple ait les yeux bleus sachant que le premier a les yeux bruns ?

Exercice 51

Solution

Amélie et Bernard lancent une pièce de monnaie qui tombe sur face avec probabilité p . Pour chaque face, Amélie obtient un point et pour chaque pile, Bernard obtient un point. Le gagnant est le premier à avoir deux points de plus que l'autre.

- (a) Trouver la probabilité que 4 lancers aient été nécessaires pour déterminer le gagnant.
- (b) Quelle est la probabilité qu'Amélie remporte le jeu ?

Exercice 52

Solution

Soit n personnes faisant partie d'un groupe. On suppose que pour chaque personne, le jour de son anniversaire peut être n'importe lequel des 365 jours de l'année avec probabilité $1/365$, indépendamment des autres membres. Notons par $A_{i,j}$ l'événement *Les personnes i et j ont leur anniversaire la même journée*, pour $i \neq j$. Montrer que les événements $\{A_{i,j}, i \neq j\}$ sont indépendants deux à deux, mais pas en tant que collection.

Exercice 53**Solution**

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli qui donnent un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $1 - p$. On s'intéresse au nombre d'épreuves nécessaires N pour obtenir r succès. Montrer que

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Exercice 54**Solution**

Utiliser l'exercice 53 pour résoudre le problème suivant : On réalise des épreuves de Bernoulli donnant un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $1 - p$. Quelle est la probabilité d'avoir n succès avant m échecs ?

4 Variables aléatoires discrètes

4.1 Variables discrètes

Exercice 55

Solution

Nous considérons les matchs de l'équipe canadienne de hockey comme des **épreuves indépendantes**. Le Canada joue trois matchs. Chaque match se termine sur un gain ou une défaite. Si le Canada compte le plus de buts dans le match, il gagne le match. S'il compte le moins de buts, il perd. Si le nombre de buts est égal, le gagnant du match est décidé avec probabilité $1/2$. Pour $i = 1, 2, 3$, nous considérons les événements

$$M_i = \{\text{le Canada compte plus de buts que l'adversaire au match } i\}$$

$$N_i = \{\text{le Canada compte moins de buts que l'adversaire au match } i\}$$

$$E_i = \{\text{le nombre de buts est égal au match } i\}$$

Nous estimons que $\mathbb{P}(M_i) = 2/5$, $\mathbb{P}(N_i) = 1/5$ et $\mathbb{P}(E_i) = 2/5$.

- Calculer la probabilité des événements $V_i = \{\text{le Canada gagne le match } i\}$ et $D_i = \{\text{le Canada perd le match } i\}$.
- Définir un espace fondamental \mathcal{S} pour les résultats finaux (gain ou défaite) des trois matchs. Décrire les événements

$$G_k = \{\text{le Canada gagne exactement } k \text{ matchs parmi les trois}\}$$

comme un sous-ensemble de cet espace. Calculer $\mathbb{P}(G_k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

- Vous pariez avec votre collègue sur l'issue des trois matchs. Vous empochez 2^k \$ si le Canada gagne exactement k des trois matchs pour $k = 1, 2, 3$. S'il perd les trois matchs, vous perdez 100 \$.

Définir une variable aléatoire $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ en termes des fonctions indicatrices des événements G_k de la question précédente qui donne votre montant gagné ou perdu selon les résultats. Trouver la loi de X (les valeurs prises par X et leurs probabilités respectives).

Exercice 56

Solution

On choisit deux entiers X et Y de manière indépendante et identique avec probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 2^{-k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

- Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 1/3$.
- Montrer que $\mathbb{P}(X < Y) = 1/3$.

(c) On considère maintenant la variable aléatoire $\min\{X, Y\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\min\{X, Y\} > k) = \frac{1}{4^k}.$$

Utiliser ce résultat pour calculer $\mathbb{E}(\min\{X, Y\})$.

(d) Démontrer que la probabilité de l'événement $\{X \text{ divise } Y\}$ est donnée par

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1} - 1}.$$

Indice : Un nombre x divise un entier y si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = my$.

Exercice 57 Solution

On choisit deux entiers X et Y de manière indépendante et identique avec probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{2}{3^k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

- (a) Calculer la probabilité que X soit un nombre pair. Calculer la probabilité que X et Y soient pairs.
- (b) On considère maintenant la variable aléatoire $\max\{X, Y\}$. Calculer $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k)$.
- (c) Pour m , un entier quelconque, trouver la probabilité que m divise X .

Exercice 58 Solution

Soit X_n une variable de loi binomiale avec paramètres n et p . On pose $\lambda = np$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

où Y est une variable aléatoire de loi Poisson avec paramètre λ .

Exercice 59 Solution

Soit un parieur avec une fortune de i \$. Il joue à un jeu pour lequel il gagne 1 \$ avec probabilité p et perd 1 \$ avec probabilité $q = 1 - p$. On note par X_k le résultat du k -ième pari. Le joueur décide de jouer jusqu'à ce qu'il soit ruiné (sa fortune est à 0 \$) ou jusqu'à ce qu'il atteigne M \$ ($M > i$). Chaque jeu est indépendant de tous les précédents.

- (a) Donner une expression simple de S_n en fonction des paris à chaque tour.
- (b) On pose

$$\tau_i = \min\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = M | S_0 = i\},$$

le **temps d'arrêt** du processus. Le jeu s'arrête toujours au temps (aléatoire) τ_i et le résultat est S_{τ_i} . On veut évaluer la probabilité que le parieur gagne (obtienne M \$) avant d'être ruiné. Notons $P_i = \mathbb{P}(S_{\tau_i} = M)$, la probabilité qu'il gagne. Quelles sont les conditions aux limites de la suite P_i , c'est-à-dire que valent P_0 et P_M ?

- (c) Conditionner la probabilité sur le résultat du premier jeu afin d'obtenir une expression pour P_i en fonction de P_{i-1} et P_{i+1} et montrer que

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}). \quad (1)$$

- (d) Montrer que

$$P_{i+1} - P_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i P_1, \quad 0 < i < M.$$

- (e) Utiliser le fait que

$$P_{i+1} - P_1 = \sum_{k=1}^i (P_{k+1} - P_k)$$

(série télescopique) pour obtenir une expression pour P_{i+1} .

- (f) Poser $i = M - 1$ dans la solution de la partie précédente et utiliser le fait que $P_M = 1$ pour trouver une expression pour P_1 et P_i .

- (g) Laisser tendre M vers l'infini dans la solution pour P_i . Interpréter les résultats.

Exercice 60

Solution

Un jeu de casino propose des mises à 1 \$ aux joueurs et offre une probabilité de gain pour le joueur de $p = 0,45$. Si un joueur décide de jouer 5 \$ jusqu'à ce qu'il se ruine ou qu'il possède 10 \$, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas ruiné ?

Exercice 61

Solution

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ une marche aléatoire où les X_k sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = q, p + q = 1$. Supposons que $S_0 = 0$. Si $a, b > 0$ sont des entiers, quelle est la probabilité que S_n atteigne a avant d'atteindre $-b$?

Indice : Utiliser l'exercice 59.

Exercice 62

Solution

Une urne contient 3 billes noires et 4 billes blanches. On tire deux billes de l'urne sans remise et on s'intéresse au nombre de billes de chaque couleur. Quelle est la distribution de cette variable aléatoire (valeurs possibles et leur probabilité respective) ?

Exercice 63

Solution

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p . Montrer que

$$\mathbb{P}(X = n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X = k)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Cette propriété s'appelle la **perte de mémoire** de la loi géométrique.

Exercice 64 Solution

Le nombre de clients qui entrent dans une chaîne de restaurant pendant la période de pointe est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. Une nouvelle publicité augmente ce paramètre λ à 24. Il y a 80 % des restaurants de la chaîne qui ont utilisé la nouvelle publicité. Si un restaurant de cette chaîne est visité par 25 clients, quelle est la probabilité qu'il ait utilisé la publicité ?

Exercice 65 Solution

Comparer l'approximation par la loi de Poisson de la variable binomiale X avec les véritables probabilités pour les valeurs ci-dessous :

1. $n = 7, p = 0,1, k = 1,$
2. $n = 9, p = 0,95, k = 8,$
3. $n = 10, p = 0,2, k = 0,$
4. $n = 10, p = 0,2, k = 5.$

Exercice 66 Solution

Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ . Montrer que

$$\mathbb{P}(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}).$$

Exercice 67 Solution

La loi binomiale permet de modéliser le nombre de succès parmi un certain nombre d'épreuves de Bernoulli. L'un des exemples auquel s'applique la loi binomiale est celui du tirage de bille avec remise d'une urne. Si une bille contient N billes, dont m sont blanches et $N - m$ sont noires et que l'on désigne par Y le nombre de billes blanches tirées lors d'un échantillon de n billes prises avec remise, alors Y suit une loi binomiale avec paramètre n et $p = m/N$.

Soit X le nombre de billes blanches tirées lors d'un échantillon de n billes prises *sans remise*. On dit que X est une variable aléatoire de loi hypergéométrique. Son nom vient de l'apparition des **séries hypergéométriques** dans les différentes fonctions génératrices (moments, probabilités, caractéristique) de la variable aléatoire.

- (a) Quelles sont les valeurs possibles pour la variable X ?
- (b) Trouver une expression pour $\mathbb{P}(X = i)$.

4.2 Espérance et moments

Exercice 68 Solution

Nous considérons une urne contenant 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. Pour

cette question, nous effectuons une suite infinie de tirages consécutifs *avec remise*. Les tirages sont indépendants. Un casino offre le pari suivant : Si une boule blanche est tirée à la i -ième épreuve, le joueur reçoit m_b dollars. Si une boule rouge est tirée, le joueur perd m_r dollars. Si une boule noire est tirée, aucun argent n'est échangé.

Nous considérons la variable aléatoire X_n le gain/perte du joueur au n -ième tirage, et la variable aléatoire

$$G_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

le gain/perte total du joueur après n tirages.

- Trouver $\mathbb{E}(G_n)$ en fonction de n , m_b et m_r .
- Si $m_b = +2$, quelle doit être la valeur de m_r pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que $\mathbb{E}(G_n) = 0$?

Exercice 69 Solution

Soit X une variable de loi géométrique avec paramètre $p = 1/2$.

On définit la variable aléatoire suivante :

$$Y = \min\{X, 4\}$$

Ici, $\min\{X, 4\}$ est le minimum entre X et 4. Par exemple, si X prend la valeur 3 alors $\min\{X, 4\} = 3$ alors que si $X = 5$, $\min\{X, 4\} = 4$.

- Trouver la loi de Y (valeurs possibles et leur probabilité respective).
- Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
- Nous définissons $Z = \max\{X, 4\}$, le maximum entre X et 4. Montrer que $Y + Z = X + 4$.
- Trouver $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 70 Solution

Une personne collectionne des coupons. Chaque jour, elle a la chance d'acquérir l'un des n coupons disponibles ayant la même probabilité. Si elle commence avec une collection vide, dans combien de jours en moyenne peut-elle s'attendre à avoir une pleine collection ?

Exercice 71 Solution

À l'exercice 53, on a introduit la loi binomiale négative. La distribution d'une variable X qui est binomiale négative est

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

- (a) Trouver une relation de récurrence pour l'espérance en conditionnant sur le résultat de la première épreuve et résoudre cette relation.
- (b) Écrire X comme une somme de variables aléatoires géométriques appropriées pour calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 72 Solution

À l'exercice 67, la loi hypergéométrique a été définie.

- (a) Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi hypergéométrique,
Indice : écrire X comme une somme de fonctions indicatrices.
- (b) Montrer que la variance de X est donnée par

$$\text{Var}[X] = n \frac{m}{N} \frac{N-m}{N} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

et comparer celle-ci avec la variance d'une loi binomiale de mêmes paramètres que X .

Exercice 73 Solution

Supposons qu'un casino propose le jeu suivant : le joueur jette une pièce de monnaie jusqu'à l'apparition du premier pile. Si celui-ci survient au lancer n , il reçoit 2^n dollars. Posons X le montant gagné lors de ce jeu. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 74 Solution

Soit X une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\text{Var}[X] = 2$ et Y une variable aléatoire indépendante de X avec $\mathbb{E}(Y) = 2$ et $\text{Var}[Y] = 1$.

- (a) Calculer $\mathbb{E}((X+Y)^2)$.
- (b) Calculer $\text{Var}[2X-3Y]$.

Exercice 75 Solution

On reprend le scénario des séries quatre de sept de l'exercice 10. On estime que les Canadiens de Montréal ont une probabilité p de gagner un match indépendamment du résultat des matchs précédents.

- (a) Quelle est la probabilité que la série soit gagnée par les Canadiens en i matches ?
- (b) Si $p = 1/2$, trouver le nombre de matches joués en moyenne.

Exercice 76 Solution

Soit N une variable aléatoire à valeurs entières non négatives, soit dans $\{1, 2, 3, \dots\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i).$$

Indice : Considérer l'identité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \mathbb{P}(N = k)$$

et changer l'ordre de sommation.

5 Variables aléatoires continues

5.1 Fonction de répartition

Exercice 77 Solution

Nous choisissons un nombre aléatoire X sur \mathbb{R} à l'aide de la fonction de répartition suivante

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} \frac{1}{7}e^{-|x|} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{7}(x+2) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{7}(x+3) & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{7}e^{-(x-2)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

- Trouver les valeurs a de X pour lesquelles $\mathbb{P}(X = a) > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X = a)$ pour ces valeurs.
- Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, trouver la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X > x\}$ sachant que $\{X > 2\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X > x | X > 2)$.
- Montrer que la fonction définie par $F_{>2}(x) := 1 - \mathbb{P}(X > x | X > 2)$ est une fonction de répartition.
Est-ce que $F_{>2}(x)$ peut s'exprimer en termes d'une densité? *La fonction de répartition $F_{>2}$ donne la loi conditionnelle de X sachant que $X > 2$.*
- À l'aide de $F_{>2}$, calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $X > 2$.

Exercice 78 Solution

Nous choisissons un nombre aléatoire X sur \mathbb{R} à l'aide de la fonction de répartition suivante

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} \frac{x^2}{6} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{6} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{1}{6}e^{-(x-3)} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

- Trouver les valeurs a de X pour lesquelles $\mathbb{P}(X = a) > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X = a)$ pour ces valeurs.
- Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, trouver la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X > x\}$ sachant que $\{X > 2\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X > x | X > 2)$.

- (d) Montrer que la fonction définie par $F_{>2}(x) := 1 - \mathbb{P}(X > x | X > 2)$ est une fonction de répartition.
 Est-ce que $F_{>2}(x)$ peut s'exprimer en termes d'une densité? La fonction de répartition $F_{>2}$ donne la loi conditionnelle de X sachant que $X > 2$.
- (e) À l'aide de $F_{>2}$, calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $X > 2$.

Exercice 79 Solution

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes.

- (a) Montrer que $c = 3/2$.
 (b) Trouver la fonction de répartition $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 80 Solution

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1+x)(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes.

- (a) Trouver c .
 (b) Trouver la fonction de répartition $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 81 Solution

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Montrer que pour $x > 0$,

$$\mathbb{P}(|Z| > x) = 2\mathbb{P}(Z > x).$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(|Z| < x) = 2\mathbb{P}(Z < x) - 1.$$

Exercice 82 Solution

Soit X une variable aléatoire de densité f_X . Trouver la densité de la variable aléatoire $aX + b$, $a > 0$.

Exercice 83 Solution

Pour chacune des variables aléatoires suivantes, trouver une expression pour la fonction de répartition pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (a) On considère une variable aléatoire X de loi Bernoulli de paramètre p .
- (b) On considère une variable aléatoire X de loi binomiale avec paramètres n, p .
- (c) On considère une variable aléatoire X de loi géométrique avec paramètre p .
- (d) On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson avec paramètre λ .

5.2 Variables continues

Exercice 84 Solution

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit la variable aléatoire

$$Y := \frac{1}{X^2}.$$

- (a) Est-ce que cette variable aléatoire est bien définie ?
- (b) Trouver la loi de Y , c'est-à-dire les valeurs possibles et la densité.

Exercice 85 Solution

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1+x)(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit la variable aléatoire

$$Y := \frac{1}{X+1}.$$

Quelles sont les valeurs prises par Y ? Trouver une expression pour la fonction de répartition de Y .

Exercice 86 Solution

La taille d'un homme âgé de 25 ans est une variable aléatoire de loi normale de paramètres $\mu = 175$ et $\sigma^2 = 36$.

- (a) Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 185 cm ?
- (b) Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm, quel pourcentage d'entre eux dépassent 192 cm ?

Exercice 87 Solution

Soit Y de loi uniforme sur $(0, 5)$. Quelle est la probabilité que les zéros de l'équation

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

soient tous deux réels ?

Exercice 88 Solution

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Calculer la densité de la variable aléatoire $Y = \ln X$.

Exercice 89 Solution

Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi uniforme discrète sur $\{1/n, 2/n, \dots, 1\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_n = k/n) = 1/n$. Montrer que pour $a, b \in [0, 1]$, $a < b$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in (a, b]) = b - a.$$

Remarque : on dira alors que la suite X_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$. La convergence en distribution est l'une des nombreuses formes de convergence que l'on rencontre dans un cours avancé de probabilités.

Exercice 90 Solution

Pour chacune des variables aléatoires X , répondre aux questions suivantes :

- (a) Soit X de loi normale de paramètres μ, σ^2 . Trouver
 - i. la densité de la variable aléatoire W , où $W = 2X$;
 - ii. la densité de la variable aléatoire Y , où $Y = |X|$;
 - iii. la densité de la variable aléatoire Z , où $Z = e^X$.
- (b) Soit X de loi exponentielle de paramètre λ . Trouver
 - i. la densité de la variable aléatoire W , où $W = 2X$;
 - ii. la densité de la variable aléatoire Y , où $Y = |X|$;
 - iii. la densité de la variable aléatoire Z , où $Z = e^X$.
- (c) Soit X de loi uniforme sur $[a, b]$. Trouver
 - i. la densité de la variable aléatoire W , où $W = 2X$;
 - ii. la densité de la variable aléatoire Y , où $Y = |X|$;
 - iii. la densité de la variable aléatoire Z , où $Z = e^X$.

Exercice 91 Solution

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ . Montrer que

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s),$$

pour tout $s, t \geq 0$. Cette propriété s'appelle la **perte de mémoire** de la loi exponentielle.

Exercice 92 Solution

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, L]$. Calculer

$$\mathbb{P}\left(\min\left(\frac{X}{L-X}, \frac{L-X}{X}\right) < y\right)$$

où $y \in [0, 1]$, soit la fonction de répartition du rapport entre le plus petit et le plus grand côté.

Exercice 93 Solution

Deux autobus desservent le circuit de l'aéroport au centre-ville. Le premier, disons le numéro 42, part de l'aéroport à toutes les 10 minutes en direction du centre-ville à partir de 16 heures. Le deuxième, disons le numéro 747, part toutes les 15 minutes, à partir de 16 heures 6 minutes. Un voyageur quitte l'aéroport à une heure uniformément distribuée entre 16 et 17 heures et prend le premier autobus disponible. On suppose qu'il n'y a pas de retard dans l'arrivée des autobus.

- Quelle est la probabilité qu'il prenne l'autobus 42 ?
- Le retard à l'atterrissage de l'avion fait en sorte que l'heure d'arrivée du voyageur est plutôt uniformément distribuée entre 16 : 25 et 17 : 25. Quelle est la probabilité qu'il prenne l'autobus 42 dans ce cas ?

5.3 Espérance et moments

Exercice 94 Solution

On reprend la variable aléatoire de l'exercice 84. Calculer l'espérance de Y .

Exercice 95 Solution

On reprend la variable aléatoire de l'exercice 80. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 96 Solution

Soit $\alpha, \beta > 0$ deux nombres réels. On pose

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

où $\Gamma(t)$ est la fonction gamma,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

- Montrer que sur $(0, \infty)$, la fonction $f(x)$ est une densité de probabilité.
- Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

et déduire que

$$\Gamma(t+k) = (t+k-1)(t+k-2)\cdots(t+1)t\Gamma(t)$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

- (c) Une variable aléatoire X ayant comme densité de probabilité la fonction $f(X)$ est une variable aléatoire de loi **Gamma**. Calculer le n -ième moment de la distribution Gamma. En déduire l'espérance et la variance.

Indice : utiliser le résultat de la partie **b**.

Exercice 97

Solution

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Définir une variable aléatoire Y fonction de X telle que Y est de loi uniforme sur $[0, 1]$ et calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 98

Solution

Soit X une variable aléatoire non négative avec densité.

- (a) Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Cette formule est la version continue de la formule présentée à l'exercice **76**.

- (b) Montrer que pour une variable aléatoire Y générale avec densité (pas nécessairement non négative), on a

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y > y) dy - \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y < -y) dy.$$

- (c) Utiliser la partie **a** pour montrer que, pour une variable aléatoire X non négative, on a

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^{\infty} nx^{n-1} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Exercice 99

Solution

En utilisant la partie **a** de l'exercice **98**, montrer par induction que les moments d'une variable aléatoire X de loi exponentielle avec paramètre λ sont

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Exercice 100

Solution

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

La variable aléatoire X est appelée une variable aléatoire de **Cauchy**.

- (a) Montrer que X n'a pas d'espérance.
 (b) Calculer la densité de la variable $Y = 1/X$.

Exercice 101**Solution**

Soit X une variable avec

$$\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \left(\frac{m}{x}\right)^a$$

où $x \in [m, \infty)$. On dit que X suit une loi de **Pareto** de paramètres $a > 0$ et $m > 0$.
Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de loi Pareto.

Exercice 102**Solution**

Une ambulance est stationnée le long d'une route de longueur L .

- On suppose que $L < \infty$. Si un accident peut survenir à n'importe quel endroit sur la route avec loi uniforme, quel est le meilleur emplacement de l'ambulance pour minimiser l'espérance de la distance à couvrir pour aller au lieu de l'accident ?
- Imaginons maintenant que la route soit de longueur infinie. Les accidents surviennent à un endroit distribué selon une loi exponentielle avec paramètre λ . Trouver l'emplacement idéal pour l'ambulance dans ce cas.

6 Vecteurs aléatoires

6.1 Lois conjointes

Exercice 103

Solution

Nous considérons une expérience aléatoire consistant à tirer 3 boules **sans remise** parmi 10 boules. Il y a 5 boules noires et 5 boules rouges. Les boules de même couleur sont identiques. Nous définissons deux variables aléatoires R et N :

$R =$ nombre de boules rouges tirées

$N =$ nombre de boules noires tirées

- Trouver la loi marginale de R , c'est-à-dire trouver les valeurs possibles de R et la probabilité $\mathbb{P}(R = r)$ pour chacune de ces valeurs.
- Trouver la loi conjointe des variables R et N , c'est-à-dire trouvez les valeurs possibles de la paire (R, N) et la probabilité $\mathbb{P}(R = r, N = n)$ pour chacune de ces valeurs.

Exercice 104

Solution

On considère deux temps d'attente aléatoires X et Y de loi exponentielle avec paramètre 1. On suppose que X et Y sont indépendants. Nous cherchons à comprendre le temps d'attente cumulatif ainsi que la proportion du temps d'attente cumulatif provenant de X . à cet effet, nous définissons les variables aléatoires suivantes

$$T = X + Y \quad (\text{temps d'attente cumulatif})$$

$$P = \frac{X}{X + Y} \quad (\text{proportion de } T \text{ due à } X)$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les valeurs prises par T et P ?
- Trouver la loi marginale de T , c'est-à-dire trouver la fonction de répartition, puis la densité marginale.
(Attention aux bornes! Un dessin peut aider...)
- Trouver la loi marginale de P , c'est-à-dire trouver la fonction de répartition, puis la densité marginale.
(Attention aux bornes! Un dessin peut aider...)
- Calculer la fonction de répartition conjointe de (T, P) .
Quelle est la densité conjointe? Que peut-on conclure au sujet de la dépendance des variables aléatoires T et P ?

Exercice 105
Solution

La densité conjointe de deux variables aléatoires X et Y est

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Considérons les variables aléatoires $Z = XY$ et $V = X/Y$. Quelles sont les valeurs possibles prises par Z et par V ?
- (b) On veut calculer la fonction de répartition de $Z = XY$: $\mathbb{P}(XY \leq z)$. Faire un schéma dans le plan (x, y) indiquant la région du plan correspondant à

$$\{(x, y) : xy \leq z\} \cap \{x \geq 1\} \cap \{y \geq 1\} .$$

- (c) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\mathbb{P}(XY \leq z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{z} - \frac{\ln z}{z} & \text{si } z \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (d) En déduire la densité de la variable $Z = XY$.
- (e) Est-ce que l'espérance de Z est finie ? Justifier.

Exercice 106
Solution

Nous choisissons un point aléatoire (X, Y) dans la région $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ avec la densité de probabilité

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Trouver la densité marginale de X et la densité marginale de Y . Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
- (b) Considérons la variable aléatoire $Z = X + Y$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Z .
- (c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ à l'aide de la densité et de la linéarité de l'espérance.

6.2 Espérance et moments

Exercice 107
Solution

Calculer la covariance entre R et N dans l'exercice 103.

6.3 Indépendance

Exercice 108

Solution

Soit 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 3 boules **sans remise**. On définit les variables aléatoires (X_1, X_2, X_3) où $X_i = \text{numéro de la } i\text{-ème boule tirée}$ pour $i = 1, 2, 3$. Est-ce que les variables X_i sont indépendantes? Justifier en une phrase. Est-ce que les variables X_i ont la même loi marginale? Justifier en une phrase. Calculer l'espérance de la somme des numéros, c'est-à-dire $X_1 + X_2 + X_3$.

Exercice 109

Solution

On choisit un point aléatoire (X, Y) dans la région $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ avec la densité de probabilité

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Trouver la densité marginale de X et la densité marginale de Y . Est-ce que X et Y sont indépendantes?
- On considère la variable aléatoire $Z = XY$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Z . Quelle est sa loi?
- Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

6.4 Lois conditionnelles

Exercice 110

Solution

- Trouver la loi conjointe de (N, Λ) , c'est-à-dire $\mathbb{P}(N = n, \Lambda = \lambda)$ pour toutes les valeurs possibles de N et Λ .
- Trouver la loi marginale de N , c'est-à-dire $\mathbb{P}(N = n)$ pour toutes les valeurs possibles de N .
- Calculer $\mathbb{P}(\Lambda = \lambda | N = 0)$ pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. En déduire l'espérance conditionnelle de Λ sachant que $N = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(\Lambda | N = 0)$.
- Calculer la fonction génératrice des moments de N , $\phi_N(t) = \mathbb{E}(e^{tN})$.
- Montrer que N n'est pas une variable aléatoire de Poisson.

Exercice 111

Solution

La densité de probabilité d'un vecteur aléatoire (X, Y) est donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{3} xy & \text{si } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Faire un schéma de la région du plan (x, y) où la densité est non-nulle. Est-ce que X et Y sont indépendantes? Justifier brièvement.
- (b) Pour $0 < y < 1$, montrer que la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est $2x$.
Indice : Utiliser le dessin en a)!
- (c) Nous voulons maintenant décrire le point en coordonnées polaires (R, Θ) , où

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

et

$$\tan \Theta = \frac{Y}{X}.$$

Trouver une expression pour la densité $f_{(R,\Theta)}(r, \theta)$ en coordonnées polaires du vecteur (R, Θ) . Est-ce que R et Θ sont indépendantes? Justifier brièvement.

- (d) Calculer la distance moyenne du vecteur (X, Y) à l'origine.

Exercice 112

Solution

La densité de probabilité d'un vecteur aléatoire (X, Y) est donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{15}|xy| & \text{si } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Faire un schéma de la région du plan (x, y) où la densité est non-nulle. Est-ce que X et Y sont indépendantes? Justifiez brièvement.
- (b) Pour $y > 1$, Trouver la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$. *Indice : Utiliser le dessin en a)!*
- (c) Nous voulons maintenant décrire le point en coordonnées polaires (R, Θ) , où $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\tan \Theta = \frac{Y}{X}$.
Trouver une expression pour la densité $f_{(R,\Theta)}(r, \theta)$ en coordonnées polaires du vecteur (R, Θ) . Est-ce que R et Θ sont indépendantes? Justifier brièvement.
- (d) Calculer la distance au carré moyenne du vecteur (X, Y) à l'origine.

Exercice 113

Solution

La densité d'un vecteur aléatoire (X, Y) est

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Déterminer les densités marginales de X et Y .
- (b) Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes? Justifier.
- (c) Calculer $\mathbb{P}(X + Y < 1)$.
- (d) Trouver la densité conditionnelle de X sachant que $Y = y$, $0 < y < 1$. Calculer $\mathbb{P}(X < 1/2 | Y = y)$.

7 Propriétés de l'espérance

7.1 Espérance conditionnelle

Exercice 114 Solution

Un immeuble à bureaux compte N étages au-dessus du rez-de-chaussée. On suppose qu'au rez-de-chaussée M personnes entrent dans l'ascenseur, avec M une variable aléatoire de Poisson avec moyenne λ . Chaque personne descend à l'un des N étages de façon indépendante des autres et avec probabilité $1/N$. Calculer le nombre d'arrêts moyen que fera l'ascenseur.

7.2 Fonctions génératrices des moments

Exercice 115 Solution

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous considérons pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire discrète Y_n avec loi

$$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Calculer $\mathbb{E}(e^{tU})$ pour $t \in \mathbb{R}$ fixé.
- Calculer $\mathbb{E}(e^{tY_n})$ pour $t \in \mathbb{R}$ fixé.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{tY_n}) = \mathbb{E}(e^{tU})$. Que peut-on en déduire (à l'aide d'un théorème présenté en classe)? Est-ce que le résultat correspond à l'intuition?

Exercice 116 Solution

Calculer la fonction génératrice des moments ainsi que les 3 premiers moments de la variable aléatoire X , où X suit une loi :

- Bernoulli de paramètre p ;
- binomiale de paramètres n, p ;
- géométrique de paramètre p ;
- Poisson de paramètre λ .
- uniforme sur l'intervalle (a, b) ;
- normale de paramètres μ, σ^2 ;
- exponentielle de paramètre λ ;
- Cauchy standard.

Exercice 117 Solution

Soit X une variable aléatoire de loi Poisson(λ).

- (a) Si X' est indépendant de X et de loi Poisson(λ'), calculer $\mathbb{E}(e^{t(X+X')})$.
- (b) En utilisant un résultat vu en classe, que peut-on en déduire au sujet de la loi de $X + X'$?

7.3 Inégalités

Exercice 118 Solution

Soit X une variable aléatoire non négative. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) \leq (\mathbb{E}(X^2))^{1/2} \leq (\mathbb{E}(X^3))^{1/3} \leq \dots$$

8 Théorèmes limites

8.1 Lois des grands nombres

Exercice 119 Solution

Soit X_1, X_2, \dots une collection de variables aléatoires i.i.d. avec moyenne $\mu < \infty$. Soit S_n la somme partielle des X_i . Montrer que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n/n - \mu| > \epsilon) = 0.$$

Remarque : ceci est la loi faible des grands nombres, sans l'hypothèse additionnelle de la variance des X_i finie. Utiliser les fonctions génératrices des moments.

8.2 Approximation poissonienne

Exercice 120 Solution

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli avec paramètre $p(n)$ où $p(n)$ est telle que $np(n)$ converge vers $\lambda > 0$. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

où Y est une variable aléatoire de loi Poisson avec paramètre λ . Utiliser les f.g.m.

8.3 Théorème central limite

Exercice 121 Solution

Au casino, la roulette est une roue qui comprend 18 cases rouges, 18 cases noires et deux cases vertes marquées respectivement 0 et 00. Un joueur mise 1 \$ par tour sur « noire ». Si la bille de la roulette tombe dans une case noire, il gagne 1 \$ et sinon il perd sa mise de 1 \$. Approximer la probabilité que le joueur soit plus riche qu'au départ après 361 tours de roulette.

Solutions

1 Dénombrement

1.1 Principes de dénombrement

Solution à l'exercice 1 Énoncé

On considère 10 lancers d'une pièce de monnaie.

- (a) Combien de séquences de 10 lancers y a-t-il ?

Solution : Comme il y a deux résultats par lancer, il y a 2^{10} séquences possibles.

- (b) Combien de séquences ont leur premier pile à la quatrième position ?

Solution : Si le premier pile est à la quatrième position, les trois premiers lancers doivent être des faces. Les six derniers peuvent être n'importe quoi, ce qui donne donc 2^6 séquences.

- (c) Combien de séquences ont exactement 1 pile ?

Solution : S'il y a un seul pile, il peut être à n'importe quel des dix lancers, on a donc 10 séquences possibles.

Solution à l'exercice 2 Énoncé

On considère l'ensemble des nombres $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

- (a) Combien y a-t-il de fonctions de S vers $\{0, 1\}$?

Solution : Pour chaque élément de S , on a 2 choix pour la valeur de la fonction. Il y a donc 2^n fonctions de S vers $\{0, 1\}$.

- (b) Combien y a-t-il de fonctions de S vers S ?

Solution : Pour chaque élément de S , on a n choix pour la valeur de la fonction. Il y a donc n^n fonctions de S vers S .

- (c) Combien de ces fonctions de S vers S sont injectives ?

Solution : Une fonction f est injective si $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$. Ainsi, pour la valeur de $f(1)$, on a n choix, pour la valeur de $f(2)$, il reste $n - 1$ choix et ainsi de suite. On a donc $n!$ fonctions de S vers S qui sont injectives.

(d) Combien y a-t-il de fonctions surjectives ?

Solution : Comme la cardinalité du domaine et de l'image est la même, toutes les fonctions injectives sont aussi surjectives. Il y a donc également $n!$ fonctions surjectives. En général, trouver le nombre de fonctions injectives d'un ensemble de cardinalité n vers un ensemble de cardinalité m se fait assez facilement, mais trouver le nombre de fonctions surjectives est plus complexe. Les curieux peuvent consulter ce [lien](#) sur les nombres de Stirling de la seconde espèce.

Solution à l'exercice 3 Énoncé

Considérer l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à six faces à deux reprises.

(a) Exprimer l'ensemble fondamental S de cette expérience en mots et en notation mathématique. Quel est le cardinal de S ?

Solution : L'ensemble S consiste en l'ensemble des couples d'entiers où la première et la deuxième composante ont une valeur entre un et six. C'est-à-dire,

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}.$$

Il est possible d'avoir une forme différente, mais équivalente, par exemple

$$S = \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, 6\}^2\}.$$

La cardinalité de S est 36 puisque le premier lancer peut être n'importe quelle valeur dans $\{1, 2, \dots, 6\}$, tout comme le deuxième lancer.

(b) Exprimer le sous-ensemble S_{10} de S correspondant aux lancers dont la somme est supérieure ou égale à 10 à l'aide de la notation mathématique et trouver la cardinalité de S_{10} .

Solution : On a

$$S_{10} = \{(i, j) \in S : i + j \geq 10\}.$$

Les valeurs possibles pour la somme sont 10, 11 et 12. Il y a une seule manière d'obtenir un 12, c'est d'avoir deux 6. Pour obtenir un 11, on peut avoir (5, 6) ou encore (6, 5). D'une manière similaire, on retrouve trois manières d'obtenir une somme de 10. On a donc

$$\#S_{10} = 1 + 2 + 3 = 6.$$

(c) On considère R le sous-ensemble de S correspondant aux paires de lancers dont

le premier résultat est strictement supérieur au second. Exprimer R en notation mathématique et trouver sa cardinalité.

Solution : On a

$$R = \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} : i > j\}.$$

On a dénombré en (a) qu'il y avait 36 résultats possibles. De ces 36, il y en a 6 qui ont le premier lancer égal au deuxième. Des 30 qui restent, la moitié auront le premier lancer strictement plus grand, ainsi, $\#R = 15$.

1.2 Permutations et Combinaisons

Solution à l'exercice 4 Énoncé

La prochaine question vise à dénombrer les différentes manières d'obtenir les mains de poker. On peut regarder ce [lien](#) pour des exemples des différentes mains. On précise qu'une suite peut commencer ou se terminer avec l'As (par exemple A-2-3-4-5 est une suite, tout comme 10-J-Q-K-A). Dans ce qui suit, par « couleur » d'une carte, on entend coeur, pique, carreau ou trèfle, et non pas rouge ou noire.

(a) Combien y a-t-il de mains possibles au poker 5 cartes ?

Solution : On fait les mains de poker avec 5 cartes, choisies parmi les 52 disponibles (on ne compte pas les Jokers). Il y a donc

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

mains possibles

(b) La meilleure main possible est la « straight flush », ou encore la quinte. Combien de quintes possibles y a-t-il ?

Solution : Une quinte consiste en cinq cartes qui se suivent, de la même couleur. Une façon de compter les quintes, en utilisant les combinaisons, est de choisir la couleur, parmi les 4 disponibles, suivi d'un choix de la dernière carte de la suite, qui peut être choisie parmi les cartes 5, 6, 7, ..., K, A puisque la plus petite suite est A, 2, 3, 4, 5 et la plus grande est 10, J, Q, K, A. On a donc

$$\binom{4}{1} \binom{10}{1} = 4 \times 10 = 40$$

quintes possibles. Parmi les presque 2,6 millions de mains possibles, vous êtes chanceux si vous obtenez une de ces mains.

- (c) La seconde main en puissance est le « four of a kind », ou encore le carré. C'est une main contenant 4 cartes de la même valeur et une autre carte quelconque. Combien y a-t-il de carrés possibles ?

Solution : Une façon de compter le nombre de carrés est de choisir la valeur du carré, puis l'autre carte. Comme il y a 13 valeurs possibles, on a

$$\binom{13}{1} \binom{48}{1} = 624$$

carrés possibles puisqu'une fois la valeur du carré choisie, il reste 48 cartes disponibles pour la dernière carte. Une autre façon de voir les choses est de choisir la valeur du carré, choisir la valeur de la 5^e carte suivie de sa couleur. On aurait trouvé

$$\binom{13}{1} \binom{12}{1} \binom{4}{1} = 624$$

- (d) La main suivante est la « full house », ou encore la main pleine, qui consiste en un trio de cartes de la même valeur, ainsi qu'une paire, d'une valeur différente évidemment. Combien y a-t-il de mains pleines au poker ?

Solution : Une façon de voir les choses est de choisir une valeur pour le trio, ainsi que 3 couleurs, puis une valeur pour la paire et 2 couleurs. On obtient

$$\binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{1} \binom{4}{2} = 3\,744$$

mains pleines possibles.

- (e) La main suivante est la « flush », ou encore la main de couleur. Elle consiste en 5 cartes de la même couleur. Combien y a-t-il de mains possibles de couleur ?

Solution : À priori, on peut penser qu'il suffit de choisir une couleur et 5 cartes parmi les 13 de cette couleur. Cependant, parmi ces combinaisons se retrouvent certaines quintes, qu'il faut enlever. On a trouvé plus haut 40 quintes, on obtient donc :

$$\binom{4}{1} \binom{13}{5} - 40 = 5\,108$$

- (f) La prochaine main est la « straight », ou encore la suite. C'est une main qui consiste en 5 cartes consécutives. Combien y a-t-il de suites possibles ?

Solution : Tout comme dans le cas des quintes, on peut se contenter de choisir la carte finale de la suite, parmi les 10 disponibles. Cette fois, on ne choisit pas une couleur, mais bien 5, au sens où chaque carte peut avoir une couleur. Il faut finalement enlever les 40 quintes du lot. Ceci donne :

$$\binom{10}{1} \binom{4}{1}^5 - 40 = 10\,200$$

suites possibles.

- (g) La prochaine main est le « three of a kind », ou encore le brelan. Elle consiste en un trio de cartes de la même valeur et deux autres cartes, de valeur différente du trio et de valeurs différentes entre elles. Combien y a-t-il de brelans possibles ?

Solution : Cette main est plus compliquée. On peut choisir la valeur du trio, parmi les 13 cartes, et les couleurs pour ces cartes. Mais pour choisir les deux autres cartes, il faut s'assurer qu'elles ne nous donnent pas un carré ou une main pleine. On choisit la valeur des deux cartes restantes en même temps, ainsi qu'une couleur pour ces deux cartes ce qui donne

$$\binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{2} \binom{4}{1}^2 = 54\,912$$

brelans possibles.

- (h) La main suivante est la double paire, qui contient à deux paires différentes et une cinquième carte qui ne donne pas une main pleine. Combien de doubles paires y a-t-il ?

Solution : On commence par choisir les deux valeurs pour nos paires, et la couleur pour chaque carte des deux paires. On choisit ensuite la dernière carte de façon à ne pas avoir une main pleine. On a

$$\binom{13}{2} \binom{4}{2}^2 \binom{11}{1} \binom{4}{1} = 123\,552$$

mains contenant en deux paires.

- (i) L'avant-dernière main consiste en une paire et trois cartes qui ne formeront pas une main pleine. Combien y a-t-il de paires possibles ?

Solution : On choisit en premier lieu la valeur de la paire, ainsi que les couleurs associées. Pour les trois dernières cartes, il faut choisir parmi les valeurs restantes ainsi qu'une couleur pour chacune de ces trois cartes. On obtient :

$$\binom{13}{1} \binom{4}{2} \binom{12}{3} \binom{4}{1}^3 = 1\,098\,240$$

paires possibles

- (j) La dernière main, la plus faible, est la « high card » ou encore carte haute, qui consiste à avoir 5 cartes différentes ne formant ni une suite, ni une couleur. Combien de ces mains y a-t-il ?

Solution : Il est relativement facile de compter les mains de 5 cartes différentes, il suffit de choisir 5 valeurs parmi les 13 et une couleur pour chaque carte. Ceci donne

$$\binom{5}{13} \binom{4}{1}^5 = 1\,317\,888.$$

Toutefois, on compte dans ces possibilités les suites et les couleurs qui sont composées de 5 cartes différentes. On doit donc enlever

$$\binom{13}{5} \binom{4}{1} = 5\,148$$

couleurs et

$$\binom{10}{1} \binom{4}{1}^5 = 10\,240$$

suites. Ceci nous donnerait

$$1\,317\,888 - 5\,148 - 10\,240 = 1\,302\,500$$

mains « carte haute ». Toutefois, en enlevant les suites et les couleurs, on a soustrait en double toutes les quintes, au nombre de 40. On doit donc les ajouter, ce qui nous donne

$$1\,302\,540$$

mains de cette forme possibles. Notons qu'il aurait été possible de soustraire tous les résultats précédents du total $\binom{52}{5}$ mains possibles pour obtenir le nombre de mains « carte haute ».

Solution à l'exercice 5

Énoncé

Démontrer l'identité suivante en utilisant un argument combinatoire :

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = 2 \binom{n+2}{3}.$$

Indice : Considérer trois tiges, l'une plus longue et les deux autres de même longueur. Vous devez insérer chaque tige dans l'un des $n+2$ endroits possibles. Il y a une restriction sur le positionnement de la plus longue tige !

Solution : Considérons la situation où la tige la plus longue ne doit pas avoir de tiges à sa gauche. Une manière de compter les possibilités est de choisir 3 endroits parmi les $n+2$ disponibles. La tige la plus longue va dans l'endroit le plus à gauche, et l'on a $2!$ manières de choisir la position des tiges de même longueur. Ceci donne le membre de droite de l'équation.

Pour le membre de gauche, on numérote les endroits de gauche à droite. On remarque que si la grande tige est à la position j , pour $1 \leq j \leq n$, il y a $(n+2-j)(n+1-j)$ possibilités de placer les deux autres tiges. On somme et l'on effectue le changement de variable $k = n+1-j$, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2 \binom{n+2}{3} &= \sum_{j=1}^n (n+2-j)(n+1-j) \\ &= \sum_{k=n}^1 (k+1)(k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)(k). \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 6

Énoncé

Démontrer l'identité suivante en donnant un argument combinatoire :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Indice : Considérer la formation d'un comité de taille quelconque avec un président. Le comité est formé à partir d'un groupe de n personnes.

Solution : Pour le côté gauche, on suppose un comité de taille k , pour $1 \leq k \leq n$. On choisit le comité de $\binom{n}{k}$ manières, et parmi ces k personnes, on désigne un président, k choix. En sommant sur k , on retrouve le membre de gauche de l'équation.

Pour le côté droit, on choisit en premier lieu le président, on a n choix. Pour les $n-1$ personnes qui restent, soit elles feront partie du comité, soit elles seront laissées de

côté. Comme il y a deux options par personne, on a 2^{n-1} choix possibles. Combiné au n choix de président, on obtient le membre de droite de l'équation.

Solution à l'exercice 7

Énoncé

Aux Jeux olympiques de Sotchi en 2014, il y avait douze skieurs à la finale des bosses. Nous comptons 4 Canadiens, 2 Américains, 2 Russes et 4 skieurs de nationalités toutes différentes.

(a) Combien de *podiums* possibles y avait-il ?

Solution : Il y a $\binom{12}{3}$ manières de choisir les membres du podium et $3!$ façons de les ordonner. Ceci nous donne donc

$$3! \times \binom{12}{3} = 1320$$

podiums possibles. Notons que, de façon équivalente, on a 12 choix pour le premier skieur, 11 pour le second et 10 pour le troisième. Ceci donne $12 \times 11 \times 10 = 1320$ podiums.

(b) De ces podiums, combien comptent exactement 2 Canadiens ?

Solution : Il y a $\binom{4}{2}$ manières de choisir les 2 Canadiens et 8 choix pour le troisième membre du podium. Encore une fois, il y a $3!$ manière de permuter les skieurs. On a donc

$$3! \times 8 \times \binom{4}{2} = 288$$

podiums possibles.

(c) Combien de podiums comptent au moins 1 Canadien parmi ses membres ?

Solution : Il est plus facile de compter les podiums ne comptant aucun Canadien. On soustraira ce nombre du nombre total de podiums trouvé en (a). On compte 8 skieurs qui ne sont pas canadiens. On a donc

$$\binom{8}{3} \times 3! = 336$$

podiums n'incluant aucun Canadien. Ceci signifie que

$$1320 - 336 = 984$$

podiums comptent au moins un Canadien.

- (d) Combien de podiums ont un Canadien en première position et un Canadien en deuxième position ?

Solution : On peut choisir les deux Canadiens de $\binom{4}{2}$ manières, et on a 10 choix pour le troisième skieur (rien ne l'empêche d'être canadien !). Il y a deux manières d'ordonner nos deux premiers Canadiens, ce qui donne un total de

$$2 \times 10 \times \binom{4}{2} = 120$$

podiums avec un Canadien en première et en deuxième position. De façon équivalente, il y a 4 choix pour la première position, 3 choix pour la deuxième et 10 choix pour la troisième, ce qui donne bien 120 podiums possibles.

- (e) Combien de podiums comptent deux skieurs d'une même nationalité en première et en deuxième position ?

Solution : On a déjà compté les podiums où deux Canadiens occupent les deux premières positions. De plus, comme le nombre de skieurs russes et américains est le même, le nombre de podiums où deux Russes occupent les deux premières marches est le même que le nombre de podiums où ce sont les Américains qui occupent les deux premières marches. On a 2 choix pour le premier skieur et 1 seul pour le deuxième, toujours avec 10 choix pour le troisième skieur. Ceci nous donne un total de

$$120 + 20 + 20 = 160$$

podiums où une même nationalité occupe les deux premières positions.

Solution à l'exercice 8 Énoncé

Nous jouons au Scrabble. Nous avons tiré les lettres $\{P, R, O, B, A, B, I\}$. On considère S , l'ensemble des arrangements ordonnés de $\{P, R, O, B, A, B, I\}$.

- (a) Quelle est la cardinalité de S ?

Solution : On a 7 éléments dont deux sont indiscernables. On a donc $7!/2!$ arrangements ordonnés possibles.

- (b) Combien de ces arrangements ordonnés ont la lettre B comme première lettre ?

Solution : Comme B est choisi, il ne reste qu'à considérer les éléments restants, ce qui inclut un B . Il y a donc $6!$ arrangements possibles.

Nous considérons A , l'ensemble des arrangements ordonnés de $\{P, R, O, B, A, B, I\}$ de six lettres contenant exactement deux voyelles.

- (c) Pour commencer, calculer le nombre de positions possibles pour deux voyelles distinctes données dans un mot de 6 lettres.

Solution : On doit choisir deux emplacements parmi 6 (il y a six lettres) donc $\binom{6}{2}$ emplacements possibles. Les voyelles étant distinctes, on doit multiplier par les permutations des voyelles qui est 2. Donc il y a $\binom{6}{2} \times 2$ positions.

- (d) Dédurre de la question précédente la cardinalité de A .

Solution : Il y a trois voyelles. Il y a donc $\binom{3}{2}$ choix possibles pour les voyelles. Le nombre de choix d'emplacements de voyelles est $\binom{6}{2}$. Pour un emplacement de voyelles donné, il y a $4!/2!$ permutations des consonnes (les B sont indiscernables) et $2!$ permutations des voyelles choisies. Il y a donc au total

$$\binom{3}{2} \times \binom{6}{2} \times 2! \times \frac{4!}{2!}$$

permutations de 6 lettres contenant exactement deux voyelles.

Solution à l'exercice 9

Énoncé

Une urne contient 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. De plus, les boules sont numérotées de 1 à 10.

- (a) Nous tirons **trois boules** de l'urne **SANS remise**. (L'ordre du tirage n'est pas important, ainsi le tirage 1 – 4 – 7 est le même que 1 – 7 – 4, 4 – 7 – 1, etc.)
- i. Soit A l'ensemble *exactement deux boules tirées sont rouges*. Trouver $\#A$.

Solution : Le nombre de tirages avec exactement deux boules rouges est

$$\binom{4}{2} \binom{6}{1} = 36,$$

puisque ceci correspond à choisir 2 boules parmi les 4 rouges et une autre parmi les 6 restantes.

- ii. Soit C l'ensemble *aucune blanche n'est tirée*. Trouver $\#C$.

Solution : Comme il y a 8 boules qui ne sont pas blanches, on a $\binom{8}{3} = 56$ tirages ne contenant pas de boule blanche.

- iii. Combien de tirages ne contenant pas de boule blanche contiennent exactement 2 boules rouges ?

Solution : On choisit les boules rouges de $\binom{4}{2}$ manières, et la boule noire de 4 manières, ce qui donne 24 tirages.

- (b) Nous tirons **trois boules** de l'urne **SANS remise**. (L'ordre du tirage **EST** maintenant important.)

- i. Soit A l'ensemble *exactement deux boules tirées sont rouges*. Trouver $\#A$.

Solution : Le nombre de tirages avec exactement deux boules rouges est

$$\binom{4}{2} \binom{6}{1} \times 6 = 216,$$

puisque ceci correspond à choisir 2 boules parmi les 4 rouges et une autre parmi les 6 restantes et de permuter les boules.

- ii. Soit C l'ensemble *aucune blanche n'est tirée*. Trouver $\#C$.

Solution : Comme il y a 8 boules qui ne sont pas blanches, on a $\binom{8}{3} = 56$ tirages ne contenant pas de boule blanche et ne tenant pas compte de l'ordre. En appliquant les 3! permutations possibles à chaque tirage, on retrouve 336 tirages ne contenant aucune boule blanche.

- iii. Combien de tirages ne contenant pas de boule blanche contiennent exactement 2 boules rouges ?

Solution : On choisit les boules rouges de $\binom{4}{2}$ manières, et la boule noire de 4 manières, ce qui donne 24 tirages, sans tenir compte de l'ordre. En les ordonnant, on retrouve 144 tirages.

Solution à l'exercice 10 Énoncé

Dans la Ligue nationale de hockey, une série éliminatoire entre deux équipes se joue au meilleur des sept matchs, c'est-à-dire qu'il faut remporter 4 victoires pour gagner la série et qu'il peut y avoir jusqu'à sept matchs. Considérons une série entre les Canadiens de Montréal et les Bruins de Boston. Combien y a-t-il de dénouements possibles ? (Par exemple, MMBMBM est une série possible, tout comme MBMBMBM.) (Défi : trouver la formule générale pour une série au meilleur des $2n + 1$ parties.)

Solution : Considérons les scénarios où Montréal l'emporte. Puisqu'il y aura autant de scénarios où Boston l'emporte, il suffira de multiplier par deux. On divise le dénombrement selon le nombre de matchs joués. Évidemment, il ne peut se jouer qu'un seul, deux ou trois parties. L'analyse commence donc à 4 parties.

- S'il s'est joué 4 parties et que Montréal a remporté la série, le seul scénario possible est $MMMM$.
- S'il s'est joué 5 parties et que Montréal a remporté la série, on doit placer la victoire de Boston dans l'un des quatre premiers matchs. Ceci donne donc $\binom{4}{1} = 4$ scénarios possibles.
- S'il s'est joué 6 parties et que Montréal a remporté la série, on doit placer les deux victoires de Boston dans deux des cinq premiers matchs. Ceci peut se faire de $\binom{5}{2} = 10$ manières.
- S'il s'est joué 7 parties et que Montréal a remporté la série, on doit placer les trois victoires de Boston dans trois des six premiers matchs. Ceci donne donc $\binom{6}{3} = 20$ scénarios possibles.

Au total, on a Montréal gagnant dans 35 scénarios, ce qui donne un grand total de 70 séries « 4 de 7 » possibles.

Solution au défi :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

Solution à l'exercice 11 Énoncé

Si on place une tour dans la case inférieure gauche d'un échiquier standard, de combien de manières différentes peut-elle se rendre au coin supérieur droit si elle ne fait que se déplacer vers la droite ou vers la gauche? *Remarque : un échiquier est une planche composée de 8×8 cases.* Généraliser le résultat à un échiquier $m \times n$.

Solution : Une solution est une permutation de 8 déplacements vers la droite, notons-les D et 8 déplacements vers le haut, notons-les H . Par exemple

$$DHDHDHDH \dots DHDH$$

est un déplacement possible. Il y a donc

$$\frac{16!}{8!8!} = 12870$$

déplacements possibles. Dans le cas général, on a

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

déplacements.

2 Axiomes des probabilités

2.1 Théorie des ensembles

Solution à l'exercice 12 Énoncé

On considère l'ensemble de nombres $N_{100} = \{1, 2, \dots, 99, 100\}$. En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, calculer la somme des nombres dans N_{100} qui ne sont pas divisibles par 3 ni par 5.

Rappel : La somme des n premiers nombres est donnée par

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution : La somme des nombres dans N_{100} est donnée par

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(101)}{2} = 5050.$$

De cette quantité, il faut soustraire la somme des multiples de 3, soit $3 + 6 + \dots + 96 + 99 = 3(1 + 2 + \dots + 33)$. On obtient avec la formule de la somme des entiers 1683. Il faut également soustraire la somme des multiples de 5, soit $5 + 10 + \dots + 100 = 5(1 + 2 + \dots + 20)$. On obtient, toujours avec la formule, un total de 1050. On a donc

$$5050 - 1683 - 1050 = 2317.$$

Il y a un problème avec la réponse ci-dessus. Lorsque l'on a enlevé les multiples de 3, on a soustrait les nombres 15, 30, 45, ..., 90. Ces nombres ont également été soustraits lorsque les multiples de 5 ont été enlevés. Il faut donc les rajouter à notre réponse. Comme $15 + 30 + \dots + 90 = 15(1 + 2 + \dots + 6) = 315$, la somme des nombres dans N_{100} qui ne sont ni multiples de 3 ni multiples de 5 est égale à 2632.

Solution à l'exercice 13 Énoncé

On considère 3 sous-ensembles A, B et C d'un ensemble S quelconque. Écrire une expression en fonction de A, B, C et en utilisant les opérations sur les ensembles pour décrire l'ensemble des éléments

(a) qui sont uniquement dans A ;

Solution :

$$A \cap B^c \cap C^c$$

(b) qui sont dans A et dans C , mais pas dans B ;

Solution :

$$A \cap B^c \cap C$$

(c) qui font partie d'au moins un des ensembles A, B ou C ;

Solution :

$$A \cup B \cup C$$

(d) qui font partie d'au moins deux des ensembles A, B et C ;

Solution :

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(e) qui sont à la fois dans A, B et C ;

Solution :

$$A \cap B \cap C$$

(f) qui ne sont pas dans A , ni dans B ni dans C ;

Solution :

$$S \setminus (A \cup B \cup C) = (A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$$

(g) qui sont dans un seul des ensembles A, B ou C ;

Solution :

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

(h) qui sont dans *au plus* deux des ensembles A, B et C .

Solution :

$$(A \cap B \cap C)^c$$

Solution à l'exercice 14 Énoncé

Considérer l'équation

$$x + y + z = 20,$$

où $0 \leq x, y, z$ sont des nombres entiers.

(a) Combien de solutions possibles existe-t-il?

Solution : Le nombre de solutions est donné par

$$\binom{20 + 3 - 1}{3 - 1} = 231.$$

Pour le voir, on imagine 20 points \cdot et deux séparateurs $|$. Une solution à l'équation $x + y + z = 20, x, y, z \geq 0$, correspond à une permutation des points et des séparateurs. Par exemple, la permutation

..... | | ...

correspond à $x = 8, y = 9$ et $z = 3$. Plus de détails sont donnés [ici](#).

(b) Combien de ces solutions ont $x \leq 3$?

Solution : Pour trouver le nombre de solutions avec la restriction, on soustrait de la réponse de a le nombre de solutions avec $x \geq 4$. Posons $x = 4 + x_0$. Le nombre de solutions à

$$x + y + z = 20, x \geq 4$$

est le même que le nombre de solutions au problème

$$4 + x_0 + y + z = 20.$$

Ce problème se résout de la même manière qu'en a, et on obtient 153 solutions. Ainsi, le nombre de solutions au problème

$$x + y + z = 20, x \leq 3$$

est $231 - 153 = 78$.

(c) Combien de solutions possibles existe-t-il au problème

$$x + y + z = 20, x \leq 3, y \leq 5?$$

Solution : Il y a 153 solutions au problème

$$x + y + z = 20, x \geq 4,$$

sans restriction sur y . Il y a 120 solutions au problème

$$x + y + z = 20, y \geq 6,$$

sans restrictions sur x , trouvés de la même manière qu'en b. Finalement, il y a 66 solutions au problème

$$x + y + z = 20, x \geq 4, y \geq 6.$$

Soit T l'ensemble des solutions au problème initial, sans restriction, A l'ensemble des solutions au problème où $x \leq 3$ et $y \leq 5$, B l'ensemble des solutions où $x \geq 4$, et C l'ensemble des solutions où $y \geq 6$. Alors par le principe d'inclusion-exclusion, on a

$$\#A = \#T - \#B - \#C + \#(B \cap C),$$

ce qui veut dire que

$$\#A = 231 - 153 - 120 + 66 = 24.$$

2.2 Axiomes des probabilités

Solution à l'exercice 15 Énoncé

Soit A l'événement *il y aura accumulation de neige samedi* et B l'événement *il y aura accumulation de neige dimanche*. Si $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et que $\mathbb{P}(B) = 0,7$,

- (a) À l'aide des axiomes des probabilités, calculer un minorant à la probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$, la probabilité qu'il neige samedi et dimanche.

Solution : Puisque

$$1 \geq \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

on obtient $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0,6 + 0,7 - 1 = 0,3$. L'inégalité $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$ est parfois appelée l'inégalité de Bonferroni.

- (b) Appliquer un argument par induction pour obtenir l'inégalité à n événements :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap E_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - (n - 1).$$

Solution : Le cas $n = 2$ est celui de la première partie de l'exercice. Supposons que le résultat soit vrai pour $n - 1$ événements. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap E_n) &= \mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap E_{n-1}) \cap E_n) \\ &\geq \mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap E_{n-1})) + \mathbb{P}(E_n) - 1 \end{aligned}$$

par l'inégalité pour 2 événements. Ensuite, l'hypothèse d'induction permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap E_{n-1})) + \mathbb{P}(E_n) - 1 &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_k) - (n-2) + \mathbb{P}(E_n) - 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E_k) - (n-1). \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 16 Énoncé

En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, démontrer que si on distribue aléatoirement (de manière équiprobable) n billes numérotées de 1 à n dans r urnes aussi numérotées, la probabilité qu'il n'y ait pas d'urne vide est

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} (-1)^k (r-k)^n}{r^n}.$$

Solution : Sans condition, pour chaque bille on a r choix d'urnes. Il y a donc un total de r^n distributions possibles. Comptons le nombre de distributions ne laissant aucune urne vide. Des $\binom{r,0}{r}^n$ distributions possibles, on doit soustraire celles qui laissent une urne vide. On peut choisir cette urne de $\binom{r}{1}$ manières et distribuer les n billes dans les $r - 1$ urnes restantes, ce qui donne $r(r - 1)^n$. Mais en faisant ceci, on a soustrait à deux reprises l'urne 1 et l'urne 2 vide, l'urne 1 et l'urne 3 et ainsi de suite. On ajoute donc les $\binom{r}{2}(r - 2)^n$ distributions ayant été enlevées en double. Mais ceci rajoute en trop les triplets d'urnes vides, et ainsi de suite en suivant le principe d'inclusion-exclusion. Le nombre de distributions ne laissant aucune urne vide est donc

$$\sum_{k=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} (-1)^{r-k} k^n.$$

On obtient le résultat voulu en divisant nos deux totaux de distributions.

Solution à l'exercice 17 Énoncé

30 % des étudiants du cours *Probabilités* suivent le cours d'*Analyse*, 40 % suivent le cours de *Statistique* et 50 % ne suivent aucun des deux. Si nous choisissons un étudiant du cours de *Probabilités* de manière équiprobable, trouver

- (a) la probabilité que l'étudiant suive le cours d'*Analyse* OU de *Statistique*;

Solution : Écrivons A et S pour les événements correspondants à l'étudiant étant dans le cours d'*Analyse* et de *Statistique*. Nous avons $0,5 = \mathbb{P}((A \cup S)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup S)$. Donc $\mathbb{P}(A \cup S) = 0,5$.

- (b) la probabilité que l'étudiant suive le cours d'*Analyse* ET de *Statistique*.

Solution : Nous avons $\mathbb{P}(A \cap S) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(A \cup S) = 0,3 + 0,4 - 0,5 = 0,2$.

Solution à l'exercice 18 Énoncé

À l'université, il est possible de participer à du soutien pour les cours de probabilités, d'algèbre linéaire et de calcul I. Il y a 100 étudiants qui sont inscrits dans ces trois cours. On compte 28 étudiants qui suivent le soutien en probabilités, 26 qui le suivent en algèbre linéaire et 16 font le soutien en calcul I. Également, 12 étudiants suivent simultanément le soutien en probabilités et en algèbre linéaire, 4 suivent le soutien en probabilités et en calcul et 6 qui suivent le soutien en algèbre linéaire et en calcul. Finalement 2 étudiants qui suivent les trois soutiens.

- (a) Parmi les 100 élèves suivant simultanément les trois cours, quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ne suive aucun cours de soutien ?

Solution : On utilise le principe d'inclusion-exclusion pour calculer combien d'étudiants suivant au moins un cours de soutien. On soustrait ce nombre au total d'étudiant (100) et on trouve

$$100 - (28 + 26 + 16 - 12 - 4 - 6 + 2) = 50.$$

On a donc une chance sur deux de choisir un étudiant ne suivant aucun cours de soutien.

- (b) Si un étudiant est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il suive exactement un cours ?

Solution : On utilise encore une fois le principe d'inclusion-exclusion pour calculer combien d'étudiants suivant que le soutien en probabilités, en algèbre

linéaire ou en calcul. Pour probabilités, on trouve

$$28 - 14 - 4 + 2 = 14.$$

D'une façon similaire, on trouve qu'il y a 10 étudiants suivant seulement le cours soutien en algèbre linéaire et 8 celui en calcul I. On a donc une probabilité de

$$\frac{14 + 10 + 8}{100} = \frac{32}{100}$$

d'un choisir un tel étudiant.

Solution à l'exercice 19 Énoncé

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble S quelconque. On note par $A\Delta B$ l'ensemble

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

appelé la différence symétrique.

(a) Décrire en mots l'ensemble $A\Delta B$.

Solution : C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à un et un seul des sous-ensembles A et B .

(b) Écrire $\mathbb{P}(A\Delta B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Solution : Puisque les ensembles $(A \setminus B)$ et $(B \setminus A)$ sont disjoints, on a

$$\mathbb{P}(A\Delta B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

Comme $A \setminus B = A \cap B^c$, on obtient que

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Pour voir cette dernière égalité, on écrit $A = (A \cap B) + (A \cap B^c)$. D'une manière analogue, on trouve

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Solution à l'exercice 20 Énoncé

Soient \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 des probabilités sur un même espace S . Pour chacune des situations suivantes, montrer que \mathcal{P} est une probabilité ou donner un contre-exemple à l'un des axiomes, selon le cas.

(a) $\mathcal{P}(E) = (\mathbb{P}_1(E) + \mathbb{P}_2(E))/2$ pour tout E dans S .

Solution : Le premier axiome est vérifié puisque \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 sont des probabilités, on a

$$\frac{0 + 0}{2} \leq \frac{\mathbb{P}_1(E) + \mathbb{P}_2(E)}{2} \leq \frac{1 + 1}{2}.$$

Le deuxième axiome est également vérifié puisque

$$\mathcal{P}(S) = \frac{\mathbb{P}_1(S) + \mathbb{P}_2(S)}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

Finalement, pour une collection d'événements $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mutuellement exclusifs, on a

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \frac{\mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) + \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right)}{2} = \frac{\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_1(E_i) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_2(E_i)}{2} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(E_i).$$

(b) $\mathcal{P}(E) = (\mathbb{P}_1(E))^2$ pour chaque E dans S .

Solution : \mathcal{P} n'est pas une probabilité, puisque le troisième axiome n'est pas respecté. En effet, pour une collection d'événements mutuellement exclusifs, on a

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right)\right)^2 = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i)\right)^2$$

qui, en général, n'est pas égal à

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(E_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{P}(E_i))^2.$$

2.3 Calculs de probabilités

Solution à l'exercice 21 Énoncé

Une urne contient des billes numérotées de 1 à 20. On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on tire une bille étant un multiple de 5. On effectue par la suite un dernier tirage. Soit N le numéro de la bille tirée. Quelle est la plus grande probabilité, $\mathbb{P}(N = 15)$ ou $\mathbb{P}(N = 13)$? Pourquoi?

Solution : À priori, il semble évident que $\mathbb{P}(N = 13)$ sera plus grand puisqu'on sait qu'un multiple de 5 a été pigé juste avant, et ce multiple pourrait bien être 15. Il y a tout de même 1 chance sur 4 que ce soit le 15 qui arrête le jeu. Également, si on ne s'attarde qu'aux billes 5, 10, 13, 15 et 20, on constate que 4 fois sur 5 la bille 13 sera précédée d'au moins 1 bille multiple de 5. Pourtant, notre intuition n'est pas bonne ici. Voyons pourquoi.

Calculons la probabilité que la bille numéro 15 soit celle juste après le premier multiple de 5. Avec les 19 billes différentes de la bille 15, on peut faire $19!$ permutations et placer la bille 15 immédiatement après la première bille parmi les billes 5, 10, 20. Ceci nous donne donc

$$\mathbb{P}(N = 15) = \frac{19!}{20!} = \frac{1}{20}.$$

Mais le même raisonnement s'applique à la bille numéro 13, ce qui signifie en fait que les deux événements ont même probabilité!

Solution à l'exercice 22

Énoncé

Une urne contient 10 boules : 9 noires et 1 blanche. Nous pigeons deux boules sans remise de l'urne. (Nous supposons que les tirages sont équiprobables.)

- (a) Soit A l'événement *deux boules noires sont tirées* et B l'événement *une boule blanche est tirée*. Trouver $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Solution : Soit N l'événement *nous pigeons deux boules noires* et B l'événement *nous pigeons la boule blanche*. Nous avons

$$\mathbb{P}(N) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} = 8/10 \quad \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(N) = 2/10$$

- (b) Nous répétons un tirage de deux boules comme ci-dessus en remettant les deux boules après chaque tirage. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit E_n l'événement *le n -ième tirage est le premier où une boule blanche est tirée*. Trouver $\mathbb{P}(E_n)$ et $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$.

Solution : Nous procédons par cardinalité. Comme nous répétons l'expérience, nous multiplions la cardinalité de chaque ensemble. Nous avons l'événement N pour les $n - 1$ premiers tirages et B pour le dernier. Donc

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{\binom{9}{2}^{n-1} \binom{9}{1}}{\binom{10}{2}^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5}$$

Par conséquent, comme les événements E_n sont disjoints par définition, par

additivité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 1$$

Solution à l'exercice 23

Énoncé

Vous participez à un jeu télévisé, à l'étape finale. Voici les règles du jeu : devant vous se trouvent trois boîtes. Deux de celles-ci ne contiennent rien et l'autre contient le gros lot. L'animateur connaît le contenu des boîtes, il sait donc dans laquelle se trouve le gros lot. Il vous demande de choisir une boîte, et par la suite, il éliminera l'une des deux autres boîtes, qui ne contient pas le gros lot. Il vous demande ensuite de choisir entre votre boîte et la boîte restante. Quelle boîte devriez-vous choisir ? Expliquez pourquoi.

Solution : Vous êtes mieux de changer de boîte, avez ainsi plus de chances de remporter le gros lot. Voici pourquoi. Supposons qu'au départ, vous choisissez une boîte vide. Vous aviez une probabilité de $2/3$ de faire un tel choix. Dans ce cas, l'animateur va éliminer l'autre boîte vide et la boîte restante contient le gros lot. Vous gagnez donc en changeant de boîte.

À l'opposé, si vous aviez choisi le gros lot, l'animateur élimine l'une des boîtes vides et en changeant, vous perdez. Mais cela n'arrivera que dans $1/3$ des cas. Ce jeu est souvent connu sous le nom du problème de **Monty Hall**.

Solution à l'exercice 24

Énoncé

Aux Jeux olympiques de Sotchi, il y a douze skieurs à la finale des bosses. Nous comptons 4 Canadiens, 2 Américains, 2 Russes et 4 skieurs de nationalités toutes différentes.

Nous estimons que les classements finaux des skieurs sont équiprobables. à partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

- (a) Montrer que la probabilité de l'événement *exactement deux skieurs sur les trois premiers sont canadiens* est $12/55$.

Solution : Ici, nous pouvons procéder de manière non ordonnée. Nous avons $\binom{12}{3}$ possibilités pour les trois premiers skieurs. Le nombre de choix de Canadiens est de $\binom{4}{2}$. Le nombre de choix du dernier skieur non canadien est $\binom{8}{1}$. La probabilité est donc

$$\frac{\binom{4}{2} \times \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{6 \times 8}{12 \times 11 \times 10 / 6} = \frac{6 \times 8 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = 12/55$$

- (b) Montrer que la probabilité de l'événement *au moins un skieur canadien est parmi les trois premiers* est $41/55$.

Solution : Calculons la probabilité qu'il n'y ait aucun Canadien. Nous avons $\binom{8}{3}$ choix pour ces skieurs

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = 14/55 .$$

L'événement voulu est le complément de cet événement. La probabilité est donc $1 - 14/55 = 41/55$.

- (c) Calculer la probabilité que deux skieurs canadiens se classent premier et deuxième.

Solution : Cette fois l'ordre est important. Nous avons que le nombre de classements ordonnés possible est $12 \times 11 \times 10$. Le nombre de classements où deux Canadiens sont premiers est $4 \times 3 \times 10$ où 10 est le choix du troisième skieur (il peut être canadien ou non). Nous avons donc que la probabilité est

$$\frac{4 \times 3 \times 10}{12 \times 11 \times 10} = 1/11 .$$

- (d) Votre collègue prétend que comme il y a 4 Canadiens, 2 Américains et 2 Russes, la probabilité que les deux premiers skieurs soient canadiens sachant que les deux premiers skieurs ont la même nationalité est $1/2$. Calculer cette probabilité pour déterminer si votre collègue a suivi MAT-1720 ou non.

Solution : Soit C l'événement *deux skieurs canadiens se classent premier et deuxième* et N l'événement *les deux skieurs ont la même nationalité*. Nous avons

$$\mathbb{P}(C|N) = \frac{\mathbb{P}(C \cap N)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(N)}$$

Mais $N = A \cup R \cup C$ où A est *deux skieurs américains se classent premier et deuxième* et de manière similaire pour R . Ces événements sont disjoints. De plus $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R)$. Nous avons

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2 \times 1 \times 10}{12 \times 11 \times 10} = 1/66$$

Nous avons donc que $\mathbb{P}(C|N) = \frac{1/11}{1/66 + 1/66 + 6/66} = 6/8 = 3/4$. Clairement, notre collègue n'a pas suivi MAT-1720.

Solution à l'exercice 25 Énoncé

Une marche aléatoire simple est un processus débutant à $(0, 0)$ au temps 0. À chaque unité de temps, le processus augmente d'une unité avec probabilité $1/2$ ou diminue d'une unité avec probabilité $1/2$. Calculer la probabilité que le processus soit à 0 au temps n .

Solution : La première chose à remarquer est que si n est impair, il est impossible que la particule soit en 0. On se concentre donc sur les n pairs. Soit $n = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Que le processus soit en 0 au temps $2k$ signifie qu'il y a eu autant de $+1$ que de -1 . On permute ces différentes possibilités et on divise par 2^{2k} puisque chaque déplacement a probabilité $1/2$. On trouve donc que la probabilité de retour à 0 au temps $n = 2k$ est

$$\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$$

3 Probabilité conditionnelle et indépendance

3.1 Probabilité conditionnelle

Solution à l'exercice 26 Énoncé

Soit \mathbb{P} une probabilité sur un espace S . Soit B un événement de cet espace tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrer que pour tout événement A , la probabilité conditionnelle de A sachant B ,

$$Q_B(A) = \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilité sur S , c'est-à-dire qu'elle satisfait aux trois axiomes d'une probabilité.

Solution :

1. L'axiome $0 \leq Q_B(A) \leq 1$: puisque \mathbb{P} est une probabilité et que $A \cap B$ est un événement, il découle du fait que $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ que $0 \leq Q_B(A) \leq 1$.
2. L'axiome $Q_B(S) = 1$: puisque $S \cap B = B$, on a immédiatement que $Q_B(S) = \mathbb{P}(B) / \mathbb{P}(B) = 1$.

3. L'axiome

$$Q_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i),$$

pour une suite d'événements mutuellement exclusifs A_1, A_2, \dots : on a

$$\begin{aligned} Q_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right) \end{aligned}$$

par la distributivité de l'intersection sur l'union. Ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} Q_B(A_i), \end{aligned}$$

puisque \mathbb{P} est une probabilité. Ainsi, les trois axiomes sont satisfaits.

Solution à l'exercice 27 Énoncé

Un étudiant en actuariat doit passer des examens professionnels afin d'être reconnu par la « Society of actuaries (SOA) ». Supposons que la passation d'un examen est conditionnelle à la réussite de l'examen précédent. On estime qu'un étudiant qui a fait le cours de probabilité MAT-1720 a 90 % des chances de passer le premier examen. Conditionnellement au succès du premier, il a 75 % des chances de réussir le second et conditionnellement au succès des deux premiers, il a 65 % des chances d'en réussir un troisième.

- (a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant réussisse les trois premiers examens ?

Solution : Notons par S_1, S_2 et S_3 la probabilité de succès respectif aux examens 1, 2 et 3. On cherche $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$. On utilise le principe de multiplication

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap S_3) &= \mathbb{P}(S_1) \mathbb{P}(S_2 | S_1) \mathbb{P}(S_3 | S_1 \cap S_2) \\ &= 0,9 \times 0,75 \times 0,65 = 0,43875.\end{aligned}$$

- (b) Sachant qu'il échouera un des examens, calculer la probabilité que cet examen soit le deuxième.

Solution : On cherche $\mathbb{P}(S_2^c | (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c)$. On remarque que $(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c = S_1^c \cup S_2^c \cup S_3^c$, mais que ces événements ne sont pas disjoints. Or, puisque pour passer le deuxième examen il faut réussir le premier et pour passer le troisième il faut réussir les deux premiers, on peut réécrire $S_2^c = S_1 \cap S_2^c$ et $S_3^c = S_1 \cap S_2 \cap S_3^c$. La définition de la probabilité conditionnelle nous donne

$$\mathbb{P}(S_2^c | (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c) = \frac{\mathbb{P}(S_2^c \cap (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c)}{\mathbb{P}((S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c)}.$$

Comme $\mathbb{P}((S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c) = 1 - \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 0,56125$, il ne reste qu'à calculer $\mathbb{P}(S_2^c \cap (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c)$. En utilisant la décomposition en événements disjoints et les propriétés de la théorie des ensembles, on constate qu'il ne reste que $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2^c)$. Or

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2^c) = \mathbb{P}(S_2^c | S_1) \mathbb{P}(S_1) = 0,225,$$

ce qui signifie que $\mathbb{P}(S_2^c | (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c) \approx 0,4$.

Solution à l'exercice 28 Énoncé

Une étude faite par un institut statistique révèle les données suivantes sur le nombre d'heures moyen passées sur le Web chaque semaine par les jeunes de 12 à 24 ans durant

l'année 2009. Voici les résultats :

| Nombre d'heures par semaine | Nombre de jeunes | | Total |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|-------|
| | Jeunes de 12-17 ans | Jeunes de 18-24 ans | |
| 0 à 10 heures | 983 | 951 | 1934 |
| 11 à 20 heures | 731 | 869 | 1600 |
| 21 heures ou plus | 570 | 896 | 1466 |
| Total | 2284 | 2716 | 5000 |

TABLEAU 2 – Nombre d'heures passées sur le Web par des jeunes de 12 – 24 ans

Une personne est choisie au hasard parmi les 5000 répondants au sondage.

- (a) Quelle est la probabilité que le jeune passe entre 11 et 20 heures sur le Web par semaine ?

Solution : On a, selon le tableau,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{731 + 869}{5000} = \frac{1600}{5000} = 0,32,$$

où A est l'événement *passer entre 11 et 20 heures par semaine sur le Web*.

- (b) Calculer la probabilité conditionnelle qu'il passe 21 heures ou plus par semaine sur le Web, sachant qu'il a entre 12 et 17 ans ?

Solution : Notons J l'événement *le jeune a entre 12 et 17 ans* et B l'événement *passer 21 heures ou plus sur le Web*. On cherche $\mathbb{P}(B | J)$. Par définition,

$$\mathbb{P}(B | J) = \frac{\mathbb{P}(B \cap J)}{\mathbb{P}(J)} = \frac{\frac{570}{5000}}{\frac{2284}{5000}} \approx 0,25.$$

- (c) Calculer la probabilité conditionnelle qu'il ait entre 12 et 17 ans, sachant qu'il passe entre 11 et 20 heures par semaine sur le Web ?

Solution : On cherche $\mathbb{P}(J | A)$. Par définition, on a

$$\mathbb{P}(J | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap J)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{731}{5000}}{\frac{1600}{5000}} \approx 0,4569.$$

Solution à l'exercice 29 Énoncé

On reprend la situation de l'exercice 21 qui s'énonce comme suit : une urne contient des billes numérotées de 1 à 20. On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on tire une bille étant un multiple de 5. On effectue par la suite un dernier tirage. Soit N le numéro de la bille tirée.

Sachant que le premier multiple de 5 sort au 8^e tirage, quelle est la probabilité conditionnelle que la prochaine bille soit

- (a) la bille numéro 15 ?

Solution : Notons M_8^1 l'événement *le premier multiple de 5 est sorti au 8^e tir*. On cherche $\mathbb{P}(N = 15 | M_8^1)$. On effectue un second conditionnement afin d'utiliser les probabilités totales. On conditionne sur l'événement M_9 *le neuvième tirage est un multiple de 5*. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = 15 | M_8^1) &= \mathbb{P}(N_{15} | M_8^1 \cap M_9) \mathbb{P}(M_8^1 \cap M_9) \\ &\quad + \mathbb{P}(N_{15} | M_8^1 \cap M_9^c) \mathbb{P}(M_8^1 \cap M_9^c) \\ &= \frac{3}{12} \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

- (b) la bille numéro 13 ?

Solution : On note par $T_{\leq 7}$ l'événement *la bille numéro 13 est sortie dans les 7 premiers tirages*. On cherche $\mathbb{P}(N = 13 | M_8^1)$. Encore une fois, on conditionne sur un nouvel événement pour utiliser les probabilités totales. On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = 13 | M_8^1) &= \mathbb{P}(N = 13 | M_8^1 \cap T_{\leq 7}) \mathbb{P}(M_8^1 \cap T_{\leq 7}) \\ &\quad + \mathbb{P}(N = 13 | M_8^1 \cap T_{\leq 7}^c) \mathbb{P}(M_8^1 \cap T_{\leq 7}^c) \\ &= 0 \times \frac{7}{16} + \frac{1}{12} \frac{9}{16} = \frac{3}{64}. \end{aligned}$$

Notons que $\mathbb{P}(M_8^1 \cap T_{\leq 7}) = \frac{7}{16}$ puisque chaque position a une chance sur 16 d'être la bille 13 sachant que le premier multiple de 5 est au 8^e tir.

Notons que comparativement à l'exercice 21, ici il y a (légèrement) plus de chance que la prochaine bille soit la bille 15 (4 chance sur 64). Pourquoi est-ce différent de la conclusion de l'autre exercice ?

Solution à l'exercice 30 Énoncé

Un magicien de rue a en sa possession deux pièces de monnaie, l'une parfaitement normale et l'autre ayant deux côtés pile. Lors de sa prestation, il sélectionne une pièce au hasard

et il la lance.

- (a) La pièce montre pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce normale qui a été utilisée ?

Solution : Notons N l'événement *la pièce normale est utilisée* et P l'événement *le résultat du lancer est pile*. On cherche $\mathbb{P}(N | P)$. Par Bayes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N | P) &= \frac{\mathbb{P}(P | N) \mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(P | N) \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(P | N^c) \mathbb{P}(N^c)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

- (b) Il jette la même pièce et obtient une seconde fois le côté pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce normale ? Qu'en est-il s'il obtient n fois le côté pile avec cette pièce ? Exprimer la probabilité en fonction du nombre de piles consécutives.

Solution : Cette fois, on cherche $\mathbb{P}(N | PP)$. Encore une fois par Bayes, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N | PP) &= \frac{\mathbb{P}(PP | N) \mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(PP | N) \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(PP | N^c) \mathbb{P}(N^c)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

De façon générale, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N | P_1 P_2 \cdots P_n) &= \frac{\mathbb{P}(P_1 P_2 \cdots P_n | N) \mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(P_1 P_2 \cdots P_n | N) \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(P_1 P_2 \cdots P_n | N^c) \mathbb{P}(N^c)} \\ &= \frac{\frac{1}{2^n} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^n} \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n + 1}\end{aligned}$$

- (c) Au 42^e tir avec cette même pièce, il obtient face. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce normale ?

Solution : Évidemment, la probabilité est 1. Mais je me méfierais, c'est un magicien !

Solution à l'exercice 31 **Énoncé**

Lors du gala de remise des trophées dans la Ligue nationale de hockey, il y avait un prix spécial remis au joueur qui allait figurer sur le boîtier du jeu NHL15. Les trois candidats pour ce prix étaient P.K. Subban, Patrice Bergeron et Drew Doughty. On suppose que chaque joueur a autant de chance de remporter l'honneur. P.K. demande en coulisse à l'animateur du gala de lui révéler le nom de l'un de ses adversaires au concours (au hasard si P.K. est gagnant) qui ne remportera pas le prix. Il explique qu'il n'y a pas de problème, puisqu'il sait déjà qu'au moins un des deux ne sera pas sur le boîtier. L'animateur lui, refuse, prétendant que les chances de gagner de P.K. Subban passeront de 1 sur 3 à 1 sur 2, car il saura maintenant qu'il est parmi les deux finalistes. Qui a raison ?

Solution : La difficulté ici consiste à conditionner sur le bon événement. Une première manière de raisonner (qui n'est pas correcte) est de conditionner sur l'identité d'un perdant. Notons S, B, D les événements respectifs *Subban gagne*, *Bergeron gagne* et *Doughty gagne*. Supposons sans perte de généralité que l'animateur donne le nom de Doughty. Si on conditionne sur D^c , soit *Doughty ne gagne pas*, alors on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S | D^c) &= \frac{\mathbb{P}(D^c | S)}{\mathbb{P}(D^c)} \\ &= \frac{1 \times 1/3}{2/3} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

comme le prétendait l'animateur. Le problème avec ce raisonnement est qu'il ne tient pas en compte que si Subban gagne, l'animateur décide au hasard (en lançant une pièce de monnaie par exemple) du nom qu'il va donner. On ne veut donc pas conditionner sur qui sera perdant, mais plutôt sur le nom que l'animateur révélera. Notons A_B l'événement *l'animateur donne le nom de Bergeron* et A_D l'événement *l'animateur donne le nom de Doughty*. Encore une fois, sans perte de généralité, on suppose que l'animateur donne le nom de Doughty. On cherche alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S | A_D) &= \frac{\mathbb{P}(A_D | S) \mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(A_D | S) \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(A_D | B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_D | D) \mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{1/2 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 1 \times 1/3 + 0 \times 1/3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, Subban a raison et cela ne change pas SA probabilité. Par contre, si à la lumière de cette information, il allait voir Bergeron pour lui décrire le scénario de la question et lui annoncer que l'animateur a déclaré Doughty perdant, Bergeron estimerait maintenant ses chances à 2 sur 3! Notons que ce problème est une reformulation du problème 23.

Solution à l'exercice 32

Énoncé

On dispose de 6 urnes numérotées contenant des billes. L'urne numéro i contient i billes blanches et $6 - i$ billes noires. On pige une bille dans une urne sélectionnée au hasard et on obtient une bille blanche. Quelle est la probabilité que la bille provienne de l'urne 3?

Solution : Notons B l'événement *la bille est blanche* et U_i l'événement *la bille provient de l'urne i* . On cherche

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_3 | B) &= \frac{\mathbb{P}(B | U_3) \mathbb{P}(U_3)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B | U_3) \mathbb{P}(U_3)}{\sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(B | U_i) \mathbb{P}(U_i)} &= \frac{3/6 \times 1/6}{\sum_{i=1}^6 i/6 \times 1/6} \\ &= \frac{1/2}{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i} &= \frac{3}{21} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 33

Énoncé

Après avoir donné un test diagnostique à ses étudiants, un enseignant classe ceux-ci dans trois catégories, selon le risque d'échec du cours. On estime que les personnes à faible risque d'échec ont une probabilité de 0,1 d'échouer, ceux à moyen risque ont une probabilité de 0,15 et ceux à haut risque ont une probabilité de 0,35. Après son test, l'enseignant constate que 25% de sa classe est à faible risque, 60% est à moyen risque et 15% à haut risque.

(a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard échoue le cours?

Solution : Notons E l'événement *l'étudiant choisi aura un échec* et F, M, H les événements respectifs *faible risque, moyen risque et haut risque*. On cherche

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E | F) \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E | M) \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(E | H) \mathbb{P}(H).$$

Avec les données du problème, on trouve une probabilité de 0,1675.

(b) Si un élève choisi au hasard réussit le cours, quelle est la probabilité qu'il fasse partie des élèves à haut risque? À moyen risque? À faible risque?

Solution : On cherche $\mathbb{P}(H | E^c)$. Avec la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H | E^c) &= \frac{\mathbb{P}(E^c | H) \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(E^c)} \\ &= \frac{(1 - 0,35)0,15}{1 - 0,1675} \\ &= \frac{13}{111} = 0,117.\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on trouve $\mathbb{P}(M | E^c) = \frac{68}{111}$ et $\mathbb{P}(F | E^c) = \frac{30}{111}$.

Solution à l'exercice 34 Énoncé

Une compagnie d'assurance-santé répartit la population en trois catégories : A , les gens à faible risque de maladie ; B , les gens à risque moyen de maladie ; C , les gens à haut risque de maladie.

La compagnie estime que $2/10$ de la population est dans la catégorie A , $5/10$ dans la catégorie B et $3/10$ dans la catégorie C . De plus, elle estime que les chances de tomber malade dans la prochaine année sont de 5% pour une personne de A , 10% pour une personne de B et 20% pour une personne de C .

Nous choisissons une personne au hasard dans la population.

- (a) Soit E l'événement *la personne choisie tombe malade durant la prochaine année*. Trouver $\mathbb{P}(E)$ (**Réduire votre réponse pour la question suivante.**)

Solution : On a par la formule de probabilités totales que

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E|C)\mathbb{P}(C)$$

Avec les données du problème, on obtient donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2}{10} \frac{5}{100} + \frac{5}{10} \frac{10}{100} + \frac{3}{10} \frac{20}{100} = \frac{10 + 50 + 60}{1000} = \frac{12}{100}.$$

- (b) Si la personne choisie tombe malade durant la prochaine année, quelle est la probabilité qu'elle soit à faible risque, c'est-à-dire dans la catégorie A ?

Solution : On utilise Bayes. Nous cherchons $\mathbb{P}(A|E)$

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{1/100}{12/100} = 1/12.$$

Solution à l'exercice 35 Énoncé

Une urne contient 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. Nous tirons **trois boules** de l'urne **SANS remise**. (Les boules d'une même couleur sont indiscernables.)

(a) Soit A l'événement *exactement deux boules tirées sont rouges*. Trouver $\mathbb{P}(A)$.

Solution : Nous avons des tirages sans remise. Les tirages sont équiprobables. Il y a $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$ tirages. Le nombre de tirages avec exactement deux boules rouges est

$$\binom{4}{2} \binom{6}{1} = 36$$

La probabilité $\mathbb{P}(A)$ est donc $36/120 = 6/20 = 3/10$.

(b) Soit C l'événement *aucune blanche n'est tirée*. Trouver $\mathbb{P}(C)$.

Solution : La probabilité qu'aucune blanche ne soit tirée est le ratio du nombre de tirages sans blanches, c'est-à-dire $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$. Donc la probabilité de C est $56/120$.

(c) Montrer que la probabilité qu'exactement deux boules tirées soient rouges sachant qu'aucune blanche n'a été tirée, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A|C)$, est $\frac{3}{7}$.

Solution : La probabilité $\mathbb{P}(A \cap C)$ est la probabilité que deux rouges et une noire soient tirées. Donc

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{1}}{120} = \frac{24}{120}$$

Donc avec la probabilité de C nous obtenons $\mathbb{P}(A|C) = \frac{24}{56}$.

De manière équivalente, on peut considérer que le nouvel espace est un tirage de 3 boules parmi 8. Nous avons alors

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} = 3/7 .$$

Solution à l'exercice 36 Énoncé

Au département de mathématiques, 60 % des étudiants sont inscrits au baccalauréat, 30 % à la maîtrise et 10 % au doctorat.

Nous savons que 50 % des étudiants inscrits au baccalauréat finissent leurs études en 3 ans et 50 % les finissent en 4 ans. À la maîtrise, 2/3 des étudiants finissent leurs études en

2 ans et $1/3$ en 3 ans. Enfin, au doctorat, $1/4$ des étudiants finissent en 3 ans, la moitié finit en 4 ans et $1/4$ en 5 ans.

Nous choisissons un étudiant au hasard dans le département et considérons les événements

$$B = \{\text{l'étudiant choisi est au bacc.}\}$$

$$M = \{\text{l'étudiant choisi est à la maîtrise}\}$$

$$D = \{\text{l'étudiant choisi est au doctorat}\}.$$

(a) Soit A_3 l'événement $\{\text{l'étudiant termine ses études en 3 ans}\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_3)$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_3|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_3|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A_3|D)\mathbb{P}(D) \\ &= \frac{1}{2} \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \frac{3}{10} + \frac{1}{4} \frac{1}{10} \\ &= \frac{17}{40} \end{aligned}$$

(b) Calculer $\mathbb{P}(B|A_3)$, $\mathbb{P}(M|A_3)$, et $\mathbb{P}(D|A_3)$.

Solution : Par Bayes

$$\mathbb{P}(B|A_3) = \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap B)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{\mathbb{P}(A_3|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/2 \times 6/10}{17/40} = 12/17$$

$$\mathbb{P}(M|A_3) = \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap M)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/10}{17/40} = 4/17$$

$$\mathbb{P}(D|A_3) = \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap D)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/40}{17/40} = 1/17$$

Solution à l'exercice 37 Énoncé

Nous avons deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 10 boules : 6 blanches et 4 noires. L'urne U_2 contient 10 boules : 4 blanches et 6 noires. Nous tirons **une seule boule** : avec probabilité $3/5$ nous la tirons de l'urne U_1 . Avec probabilité $2/5$, nous la tirons de l'urne U_2 . Trouver

(a) La probabilité conditionnelle de l'événement *la boule tirée est blanche* sachant que *la boule est tirée de l'urne U_1* .

Solution : Puisqu'il y a 6 boules blanches dans l'urne U_1 sur un total de 10 boules, la probabilité cherchée est $3/5$.

(b) La probabilité de l'événement *la boule est tirée de U_1 et est blanche*.

Solution : Notons B l'événement *la boule tirée est blanche*. On cherche $\mathbb{P}(U_1 \cap B)$. Par la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(B|U_1) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap B)}{\mathbb{P}(U_1)}.$$

On en conclut avec (a) que

$$\mathbb{P}(U_1 \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$$

(c) La probabilité de l'événement *la boule tirée provient de l'urne U_1 sachant que la boule tirée est blanche*.

Solution : Nous avons par Bayes que

$$\mathbb{P}(U_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap U_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap U_1)}{\mathbb{P}(B \cap U_1) + \mathbb{P}(B \cap U_2)}.$$

Or, le numérateur est $9/25$ et $\mathbb{P}(B \cap U_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = 4/25$. Donc la probabilité est

$$\frac{9/25}{9/25 + 4/25} = 9/13$$

Solution à l'exercice 38 Énoncé

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 blanches. Nous pigeons de l'urne les 10 boules sans remise.

(a) Combien y a-t-il de tirages avec une boule blanche à la i -ème position pour i donné ?

Solution : Plaçons l'une des boules blanches en i -ème position. Il reste 9 boules à placer dont 6 noires et 3 blanches. Il y a

$$\frac{9!}{6!3!} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}$$

arrangements possibles. On remarque que la solution ne dépend pas de i .

(b) Calculer $\mathbb{P}(B_i)$ où B_i est l'événement *la i -ème boule est blanche*.

Solution : Par (a), le nombre de configurations qui ont une boule blanche en 2^e position est 84. Comme le nombre total de configurations est

$$\frac{10!}{6!4!} = \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210,$$

on trouve une probabilité de 4/10.

(c) Trouver $\mathbb{P}(B_4|B_2)$.

Solution : On peut procéder de deux manières. D'abord, avec la formule de probabilités conditionnelles qui nous dit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_4|B_2) &= \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} \\ &= \frac{\binom{8}{2}/210}{4/10} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On peut également argumenter que si la 2^e boule est blanche, il ne reste que 3 boules blanches parmi les neuf, et l'argument en (b) nous dit que la probabilité d'en avoir une en position 4 est de

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Solution à l'exercice 39 Énoncé

Le Craps est un jeu de dés populaire dans les casinos. Une partie se déroule de la manière suivante :

1. Le joueur lance deux dés.
 - Si la somme des dés est 7 ou 11, le joueur gagne et le jeu se termine.
 - Si la somme des dés est 2, 3 ou 12, il fait Craps, il perd et le jeu se termine.
2. Si la somme est 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, la somme est prise en note et le jeu continue. Le joueur lance alors les dés jusqu'à l'obtention
 - d'une somme de 7, auquel cas il perd et le jeu est terminé ;
 - d'une somme égale à la somme notée, auquel cas il gagne et le jeu est terminé.

Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne sa partie de Craps ?

Solution : Soit G l'événement *le joueur gagne la partie* et A_k l'événement *le joueur obtient une somme de k au premier lancer*. On a

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(G | A_k) \mathbb{P}(A_k).$$

Pour calculer $\mathbb{P}(G | A_k)$, on pondère l'événement *obtenir une somme de k* en fonction des résultats qui ont de l'importance à la deuxième étape, soit la somme k et la somme 7. Ainsi,

$$\mathbb{P}(G | A_k) = \frac{\mathbb{P}(\text{obtenir une somme de } k)}{\mathbb{P}(\text{obtenir une somme de } k) + \mathbb{P}(\text{obtenir une somme de } 7)}.$$

Le tableau ci-dessous donne les probabilités :

| k | $\mathbb{P}(A_k)$ | $\mathbb{P}(G A_k)$ |
|-----|-------------------|-----------------------|
| 2 | $\frac{1}{36}$ | 0 |
| 3 | $\frac{2}{36}$ | 0 |
| 4 | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 5 | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{5}$ |
| 6 | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{11}$ |
| 7 | $\frac{6}{36}$ | 1 |
| 8 | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{11}$ |
| 9 | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{5}$ |
| 10 | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 11 | $\frac{2}{36}$ | 1 |
| 12 | $\frac{1}{36}$ | 0 |

Au final, on obtient

$$\mathbb{P}(G) = \frac{244}{495} \approx 0,4929,$$

soit légèrement en défaveur du joueur.

3.2 Indépendance

Solution à l'exercice 40 Énoncé

Supposons que la probabilité d'accoucher d'un garçon est la même que celle d'accoucher d'une fille, indépendamment d'une grossesse à une autre. Une famille a eu deux enfants.

(a) Si l'un des enfants est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?

Solution : À priori, on peut penser que la probabilité est $1/2$ puisque le sexe du premier enfant ne devrait pas influencer sur le sexe du deuxième. Il faut toutefois être prudent. On a une probabilité conditionnelle à calculer, c'est-à-dire qu'on cherche

$\mathbb{P}(\text{Avoir deux filles} \mid \text{Avoir au moins une fille})$. Les configurations possibles sont

$$GG, GF, FG, FF.$$

On a donc $(1/4)/(3/4) = 1/3$.

(b) Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant que l'aînée est une fille ?

Solution : Ici, notre intuition est bonne, et la probabilité est $1/2$.

Solution à l'exercice 41 Énoncé

Aux Jeux olympiques de Sotchi, au patinage artistique, les juges russes, américains et canadiens décernent une note à chaque patineur. Nous considérons les événements suivants.

$R = \{\text{le juge russe donne une note parfaite au patineur}\}$

$C = \{\text{le juge canadien donne une note parfaite au patineur}\}$

$A = \{\text{le juge américain donne une note parfaite au patineur}\}$

En téléspectateur averti, nous avons observé qu'un patineur n'obtient jamais trois notes parfaites. De plus, la probabilité qu'il n'y ait aucune note parfaite pour un même patineur est de $1/2$. Finalement, la probabilité de donner une note parfaite est la même pour chaque juge : $1/4$.

à partir de ces informations, répondez aux questions suivantes :

(a) Exprimez l'événement *le patineur n'obtient aucune note parfaite* en termes des événements ci-dessus. En déduire la probabilité de l'événement *le patineur obtient au moins une note parfaite*.

Solution : L'événement correspond à $A^c \cap R^c \cap C^c$ qui est le complément de

$$A \cup R \cup C = \{\text{le patineur obtient au moins une note parfaite}\}.$$

Nous avons donc que $\mathbb{P}(A \cup R \cup C) = 1 - 1/2 = 1/2$.

- (b) Nous savons que l'événement C est indépendant de A et C est indépendant de R (le juge étant canadien!). à l'aide de ces informations et de la question précédente, calculer $\mathbb{P}(A \cap R)$. Déterminer si A est indépendant de R .

Solution : Avec l'information donnée, nous savons que $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/16$ et $\mathbb{P}(C \cap R) = 1/16$. De plus $\mathbb{P}(A \cap R \cap C) = 0$. Nous avons donc par le principe d'inclusion-exclusion que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup R \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap R) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(C \cap R) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap C \cap R) \\ &= 3/4 - \mathbb{P}(A \cap R) - 2/16 + 0 \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(A \cup R \cup C) = 1/2$, nous concluons que $\mathbb{P}(A \cap R) = 3/4 - 2/16 - 1/2 = 1/8$. Nous concluons que les deux événements ne sont pas indépendants, car $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(R) = 1/16$.

- (c) Nous avons aussi observé que si le patineur est américain, alors la probabilité que les juges russes et américains donnent tous deux une note parfaite est $1/4$. Si le patineur n'est pas américain, cette probabilité tombe à $1/16$. Déterminer la probabilité qu'un patineur soit américain.

Solution : Nous avons que $\mathbb{P}(A \cap R) = \mathbb{P}(A \cap R|P_a)\mathbb{P}(P_a) + \mathbb{P}(A \cap R|P_a^c)\mathbb{P}(P_a^c)$ où P_a est l'événement *{le patineur est américain}*. Or $\mathbb{P}(A \cap R) = 1/8$, $\mathbb{P}(A \cap R|P_a) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A \cap R|P_a^c) = 1/16$. Donc $1/8 - 1/16 = \mathbb{P}(P_a)(1/4 - 1/16)$. On isole pour trouver $\mathbb{P}(P_a) = 1/3$.

Solution à l'exercice 42 Énoncé

Toujours aux Olympiques de Sotchi, pour un match donné, l'équipe canadienne de hockey compte un nombre aléatoire de buts. Soit C_k l'événement

{le Canada compte k buts}

pour $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, nous avons observé que

$$\mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

L'équipe adverse compte aussi un nombre aléatoire de buts. Soit A_j l'événement

{l'adversaire compte j buts}

pour $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, nous avons observé que

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{2}{3^{j+1}}.$$

Les événements A_j et C_k sont indépendants pour tous j et k .

- (a) Exprimer l'événement $E = \{\text{le match se termine avec un score égal}\}$ en termes des événements $(A_j, j \geq 0)$ et $(C_k, k \geq 0)$. Calculer $\mathbb{P}(E)$ en justifiant à l'aide des axiomes des probabilités et les hypothèses.

Solution : Nous avons que

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \cap C_k).$$

Comme les événements sont disjoints, nous avons par additivité que $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \cap C_k)$. Les événements sont indépendants donc $\mathbb{P}(A_k \cap C_k) = \frac{2}{6^{k+1}}$. Nos obtenons donc

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{6^{k+1}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}.$$

- (b) Exprimer l'événement $B_n = \{\text{le Canada compte } n \text{ buts ou plus}\}$ en fonction des (C_k) . Calculer $\mathbb{P}(B_n)$. à l'aide de ce résultat et des propriétés d'une probabilité, démontrer que la probabilité de l'événement

$\{\text{le Canada compte un nombre infini de buts}\}$

est 0.

Solution : Nous avons $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$. En particulier, par additivité, $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-n}$. Or, les événements B_n sont décroissants et l'événement considéré est l'intersection de tous les $B_n : \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\geq n}$. Par la continuité de la probabilité et le fait que $\mathbb{P}(B_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, nous obtenons le résultat cherché.

- (c) Exprimer l'événement

$M = \{\text{le Canada compte plus de buts que l'adversaire}\}$

en fonction de $(A_j, j \geq 0)$ et $(C_k, k \geq 0)$. Calculer $\mathbb{P}(M)$.

Solution : Nous avons que l'événement

$M_j = \{\text{le Canada compte plus de buts que l'adversaire et l'adversaire compte } j \text{ buts}\}$

est donné par $\bigcup_{k=j+1}^{\infty} C_k \cap A_j$. De plus, $M = \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$. Les M_j sont disjoints donc $\mathbb{P}(M_j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{P}(M_k)$. La probabilité de M_j est elle-même donnée par additivité

$$\mathbb{P}(M_j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{P}(C_k \cap A_j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{2}{3^{j+1}} = \frac{2}{3^{j+1}} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{2}{6^{j+1}}$$

Par conséquent, $\mathbb{P}(M) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{6^{j+1}} = \frac{2}{5}$.

Solution à l'exercice 43 Énoncé

Nous considérons encore une urne contenant 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. Pour cette question, nous effectuons une suite infinie de tirages consécutifs **AVEC remise**. Les tirages sont indépendants.

- (a) Soit A l'événement *exactement deux blanches sont tirées dans les trois premiers tirages*. Trouvez $\mathbb{P}(A)$.

Solution : Nous avons

$$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3^c + B_1 \cap B_2^c \cap B_3 \cup B_1^c \cap B_2 \cap B_3$$

On peut aussi écrire $B_i^c = R_i \cup N_i$. Nous avons par indépendance que $\mathbb{P}(A) = 3 \times \left(\frac{2}{10}\right)^2 \frac{8}{10} = \frac{12}{125}$.

- (b) On définit pour chaque $i = 1, 2, 3, \dots$ les événements R_i la i -ème boule tirée est rouge, N_i , la i -ème boule tirée est noire, et B_i , la i -ème boule tirée est blanche. Pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on considère C_n l'événement la n -ème boule tirée est blanche et les $n - 1$ premières sont noires.
- Exprimer C_n en fonction des événements R_i , B_i et N_i , $i = 1, 2, \dots$

Solution : Nous avons

$$C_n = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{n-1} \cap B_n$$

- Montrer que $\mathbb{P}(C_n) = \frac{2^{n-1}}{5^n}$.

Solution : Par indépendance

$$\mathbb{P}(C_n) = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5} = \frac{2^{n-1}}{5^n}$$

- (c) Soit D l'événement *une boule blanche est tirée avant une rouge*.
 i. Exprimez l'événement D en fonction des événements C_n .

Solution : Nous avons $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

- ii. Montrez que $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{3}$.

Solution : Si une blanche est tirée avant une rouge, toutes les boules tirées avant la blanche doivent être noires. Par additivité (les événements sont disjoints)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{3}.$$

Solution à l'exercice 44 Énoncé

Soit A et B deux événements disjoints, de probabilité strictement positive. Montrer que A et B sont nécessairement dépendants.

Solution : Rappelons que deux événements sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Or, puisque A et B sont disjoints, on a $A \cap B = \emptyset$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Puisque A et B ont des probabilités strictement positives, on a $\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) > 0$ et donc, A et B ne sont pas indépendants, c'est-à-dire, ils sont dépendants.

Solution à l'exercice 45 Énoncé

Soit A et B deux événements indépendants. Montrer que

- (a) les événements A et B^c sont aussi indépendants ;

Solution : On cherche à calculer $\mathbb{P}(A \cap B^c)$. On peut écrire $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. (Vérifiez cette identité!) Cette décomposition nous donne l'union de deux événements disjoints. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c).$$

Comme A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ et l'égalité ci-dessus peut se réécrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A) (1 - \mathbb{P}(B)) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B^c). \end{aligned}$$

(b) les événements A^c et B^c sont indépendants.

Solution : Par la partie a, on sait que A et B^c sont indépendants. En appliquant à nouveau ce résultat aux événements $A' = B^c$ et $B' = A$, le résultat suit immédiatement.

Solution à l'exercice 46

Énoncé

Donner un exemple d'événements A, B et C qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne sont pas indépendants.

Solution : On considère une urne contenant une bille blanche, une bille noire, une bille rouge et une bille bleue. On tire une bille de l'urne. Soit

$$A = \{\text{La bille est de couleur blanche ou noire}\};$$

$$B = \{\text{La bille est de couleur blanche ou rouge}\};$$

$$C = \{\text{La bille est de couleur blanche ou bleue}\}.$$

Il est facile de voir que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$. De plus, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4 = 1/2 \times 1/2$. Les événements A, B et C sont donc deux à deux indépendants. Par contre, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 1/8$. Les événements ne sont donc pas indépendants.

Solution à l'exercice 47

Énoncé

Donner un exemple d'événements A, B et C tels que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),$$

mais qui ne sont pas indépendants.

Solution : On peut s'en sortir avec un exemple trivial. Soit A tel que $\mathbb{P}(A) = p_1 > 0$, B tel que $\mathbb{P}(B) = p_2 > 0$ et qui sont tels que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq p_1 p_2$. Clairement de tels événements existent (pourquoi?). Finalement, on considère C tel que $\mathbb{P}(C) = 0$. Il suit que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \leq \mathbb{P}(C) = 0,$$

ce qui signifie que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0$. Mais par construction, les événements A et B ne sont pas indépendants, donc A, B et C ne peuvent l'être.

Voici maintenant un exemple plus intéressant. On considère le lancer d'un dé blanc

et d'un dé rouge ainsi que les événements

$$A = \{\text{Le dé blanc montre un } 1, 2 \text{ ou } 3\};$$

$$B = \{\text{Le dé blanc montre un } 3, 4 \text{ ou } 5\};$$

$$C = \{\text{La somme des dés est } 9\}.$$

Notons que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$ et que $\mathbb{P}(C) = 4/36 = 1/9$. Comme $A \cap B \cap C$ est l'événement *Le dé blanc est 3 et le dé rouge est 6*, on a $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/36 = 1/2 \times 1/2 \times 1/9 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Enfin, notons que $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6 \neq 1/4$ ce qui suffit pour montrer que les événements ne sont pas indépendants. On pourrait également montrer que A et C ne sont pas indépendants, tout comme B et C .

Solution à l'exercice 48 Énoncé

Démontrer ou infirmer l'affirmation suivante : soit A un événement qui est indépendant d'un événement B et C un événement qui est aussi indépendant de B . Alors, A est indépendant de C .

Solution : L'affirmation est fautive, comme le montre l'exemple suivant : on lance un dé blanc et un dé rouge.

$$A = \{\text{Le dé blanc montre un } 1\};$$

$$B = \{\text{Le dé rouge montre un } 1\};$$

$$C = \{\text{Le dé blanc montre } 6\}.$$

Il est clair que A et B sont indépendants, tout comme B et C , mais comme A et C sont disjoints, ils sont dépendants.

Solution à l'exercice 49 Énoncé

Si quelqu'un vous propose de jouer à pile ou face contre lui, comment être certain que la pièce utilisée est bien équilibrée? Voici une expérience qui assure aux deux joueurs une probabilité de gagner de 0,5.

On dispose d'une pièce qui tombe sur face avec probabilité p , inconnue.

1. On lance la pièce et on note le résultat.
2. On lance la pièce une seconde fois et on note le résultat.
3. Si on a obtenu face-face ou encore pile-pile, on oublie tout et on recommence au début.

4. Lorsque le résultat est face-queue ou queue-face, on prend le dernier des deux tirages comme résultat de l'expérience.

Montrer que la probabilité d'avoir face avec cette expérience est de $0,5$, peu importe la valeur de p .

Solution : On note dans un premier temps que le résultat de l'expérience est indépendant du nombre de lancers requis pour y arriver, soit $\mathbb{P}(F | PP) = \mathbb{P}(F | FF) = \mathbb{P}(F)$.
On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F | FP) \mathbb{P}(FP) + \mathbb{P}(F | PF) \mathbb{P}(PF) \\ &\quad + \mathbb{P}(F | FF) \mathbb{P}(FF) + \mathbb{P}(F | PP) \mathbb{P}(PP) \\ &= 0 \times p(1-p) + 1 \times p(1-p) + \mathbb{P}(F)p^2 + \mathbb{P}(F)(1-p)^2.\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes ci-dessus pour isoler $\mathbb{P}(F)$, on trouve

$$\mathbb{P}(F) = \frac{p(1-p)}{1-p^2 - (1-p)^2} = \frac{1}{2}.$$

Solution à l'exercice 50 Énoncé

Un modèle simplifié pour prédire la transmission de caractères génétiques consiste à regarder les gènes qui transmettent un caractère donné (couleur des yeux, des cheveux, maladies génétiques, etc.) et de regarder s'ils sont dominants ou récessifs. Supposons que la couleur des yeux ne peut être que bleue ou brune. Notons le gène qui donne la couleur brune B et celui qui donne la couleur bleue b . On dit également que le gène b est récessif, c'est-à-dire qu'il doit venir en deux exemplaires pour qu'un individu ait les yeux bleus. Quelqu'un ayant les gènes Bb sera dit porteur, mais la couleur de ses yeux sera brune. Lorsqu'un couple a un enfant, chaque parent transmet l'un de ses deux gènes à l'enfant. Considérons un couple composé d'un homme Bb et d'une femme Bb . Le couple a un garçon.

- (a) Quelle est la probabilité que l'enfant ait les yeux bleus ?

Solution : L'enfant peut être BB, Bb, bB ou bb , des quatre, seul bb lui donne les yeux bleus. Il y a donc 1 chance sur 4.

- (b) Supposons maintenant que ce garçon a les yeux bruns et qu'il a à son tour un enfant avec une femme *porteuse*. Quelle est la probabilité que leur enfant ait les yeux bleus ?

Solution : Puisque l'enfant a les yeux bruns, ses gènes sont parmi $\{BB, Bb, bB\}$. En particulier, si P est l'événement *L'homme est porteur*, on a $\mathbb{P}(P) = 2/3$. Notons E l'événement *l'enfant a les yeux bleus*. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E | P) \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(E | P^c) \mathbb{P}(P^c) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

- (c) Quelle est la probabilité qu'un deuxième enfant de ce couple ait les yeux bleus sachant que le premier a les yeux bruns ?

Solution : Notons E_1 l'événement *le premier enfant a les yeux bleus* et E_2 l'événement *le deuxième enfant a les yeux bleus*. Notons qu'en (a) on a calculé $\mathbb{P}(E_1) = 1/6$. On cherche

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_2 | E_1^c) &= \frac{\mathbb{P}(E_1^c \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_1^c)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E_1^c \cap E_2 | P) \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(E_1^c \cap E_2 | P^c) \mathbb{P}(P^c)}{5/6} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3}}{5/6} \\ &= \frac{3}{20}.\end{aligned}$$

Solution à l'exercice 51 Énoncé

Amélie et Bernard lancent une pièce de monnaie qui tombe sur face avec probabilité p . Pour chaque face, Amélie obtient un point et pour chaque pile, Bernard obtient un point. Le gagnant est le premier à avoir deux points de plus que l'autre.

- (a) Trouver la probabilité que 4 lancers aient été nécessaires pour déterminer le gagnant.

Solution : S'il y a eu 4 lancers, les seules possibilités sont $FPPF, PFFF$ ou encore $PFPP, FPPP$ (pourquoi?). La probabilité que 4 lancers aient été nécessaire est $2p^3(1-p) + 2p(1-p)^3 = 2p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$.

- (b) Quelle est la probabilité qu'Amélie remporte le jeu ?

Solution : On conditionne sur les deux premiers lancers et on utilise les probabilités totales.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A | FF) \mathbb{P}(FF) + \mathbb{P}(A | FP) \mathbb{P}(FP) + \mathbb{P}(A | PF) \mathbb{P}(PF) \\ &\quad + \mathbb{P}(A | PP) \mathbb{P}(PP) \\ &= 1 \times p^2 + \mathbb{P}(A) p(1-p) + \mathbb{P}(A) (1-p)p + 0 \times (1-p)^2 \\ &= p^2 + 2\mathbb{P}(A) p(1-p)\end{aligned}$$

En isolant $\mathbb{P}(A)$, on trouve

$$\mathbb{P}(A) = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}.$$

Solution à l'exercice 52 Énoncé

Soit n personnes faisant partie d'un groupe. On suppose que pour chaque personne, le jour de son anniversaire peut être n'importe lequel des 365 jours de l'année avec probabilité $1/365$, indépendamment des autres membres. Notons par $A_{i,j}$ l'événement *Les personnes i et j ont leur anniversaire la même journée*, pour $i \neq j$. Montrer que les événements $\{A_{i,j}, i \neq j\}$ sont indépendants deux à deux, mais pas en tant que collection.

Solution : Soit i, j tels que $i \neq j$. Alors on a $\mathbb{P}(A_{i,j}) = 365/365^2 = 1/365$. Soit i, j, k tels que $i \neq j \neq k$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{j,k}) &= \frac{365}{365^3} \\ &= \frac{1}{365}.\end{aligned}$$

Également, soit i, j, k, l tels que $i \neq j \neq k \neq l$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) &= \frac{365}{365^2} \times \frac{365}{365^2} \\ &= \frac{1}{365^2}.\end{aligned}$$

On a donc bien indépendance des événements lorsque pris deux à deux. Toutefois, lorsque l'on considère l'intersection de tous les $\binom{n}{2}$ événements, cela signifie que tout le monde a le même jour d'anniversaire. Ceci se produit avec probabilité

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{(i,j,i \neq j)} A_{i,j}\right) = \frac{1}{365^{n-1}}.$$

Par contre, si on considère le produit des probabilités des événements $A_{i,j}$, on obtient

$$\prod_{(i,j,i \neq j)} \mathbb{P}(A_{i,j}) = \frac{1}{365 \binom{n}{2}}.$$

Comme $\binom{n}{2} = \frac{2(n-1)}{2} \neq n-1$ pour $n > 2$, on ne peut avoir indépendance des événements.

Solution à l'exercice 53 Énoncé

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli qui donnent un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $1-p$. On s'intéresse au nombre d'épreuves nécessaires N pour obtenir r succès. Montrer que

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Solution : La partie $p^r (1-p)^{n-r}$ s'explique par le fait qu'il faut que les r succès surviennent, tout comme les $n-r$ échecs. Pour les r succès, on sait que l'un d'entre eux sera à la position n , puisque c'est à ce moment que les épreuves se terminent. Il ne reste qu'à placer les $r-1$ succès restant parmi les $n-1$ épreuves possibles. Lorsqu'il sera question de variables aléatoires, on verra que N est l'une des formes de la loi **binomiale négative**.

Solution à l'exercice 54 Énoncé

Utiliser l'exercice 53 pour résoudre le problème suivant : On réalise des épreuves de Bernoulli donnant un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité d'avoir n succès avant m échecs ?

Solution : Pour avoir n succès avant m échecs, il faut que le n^e succès survienne avant la $n+m$ ième épreuve. On conditionne sur le moment du n^e succès.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(n^e \text{ succès avant la } n+m \text{ ième épreuve}) \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbb{P}(n^e \text{ succès avant } n+m \text{ ième épreuve} \mid n^e \text{ succès au temps } k) \\ & \quad \times \mathbb{P}(n^e \text{ succès au temps } k) \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} 1 \times \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}. \end{aligned}$$

4 Variables aléatoires discrètes

4.1 Variables discrètes

Solution à l'exercice 55 Énoncé

Nous considérons les matchs de l'équipe canadienne de hockey comme des **épreuves indépendantes**. Le Canada joue trois matchs. Chaque match se termine sur un gain ou une défaite. Si le Canada compte le plus de buts dans le match, il gagne le match. S'il compte le moins de buts, il perd. Si le nombre de buts est égal, le gagnant du match est décidé avec probabilité $1/2$. Pour $i = 1, 2, 3$, nous considérons les événements

$$M_i = \{\text{le Canada compte plus de buts que l'adversaire au match } i\}$$

$$N_i = \{\text{le Canada compte moins de buts que l'adversaire au match } i\}$$

$$E_i = \{\text{le nombre de buts est égal au match } i\}$$

Nous estimons que $\mathbb{P}(M_i) = 2/5$, $\mathbb{P}(N_i) = 1/5$ et $\mathbb{P}(E_i) = 2/5$.

- (a) Calculer la probabilité des événements $V_i = \{\text{le Canada gagne le match } i\}$ et $D_i = \{\text{le Canada perd le match } i\}$.

Solution : Nous avons que $\mathbb{P}(V_i) = \mathbb{P}(M_i) + \mathbb{P}(V_i|E)\mathbb{P}(E)$. Donc $\mathbb{P}(V_i) = 2/5 + 1/5 = 3/5$. D'un autre côté, $\mathbb{P}(D_i) = 1 - 3/5 = 2/5$.

- (b) Définir un espace fondamental \mathcal{S} pour les résultats finaux (gain ou défaite) des trois matchs. Décrire les événements

$$G_k = \{\text{le Canada gagne exactement } k \text{ matchs parmi les trois}\}$$

comme un sous-ensemble de cet espace. Calculer $\mathbb{P}(G_k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Solution : Un bon espace fondamental est $\mathcal{S} = \{(e_1, e_2, e_3) : e_i \in \{0, 1\}\}$. $G_k = \{(e_1, e_2, e_3) : e_1 + e_2 + e_3 = k\}$. La probabilité de G_k est simplement donnée en choisissant les positions des k gains. Les épreuves étant indépendantes, nous avons

$$\mathbb{P}(G_k) = \binom{k}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{3-k} = \binom{k}{3} \frac{3^k 2^{3-k}}{125}.$$

- (c) Vous pariez avec votre collègue sur l'issue des trois matchs. Vous empochez 2^k \$ si le Canada gagne exactement k des trois matchs pour $k = 1, 2, 3$. S'il perd les trois matchs, vous perdez 100 \$.

Définir une variable aléatoire $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ en termes des fonctions indicatrices des événements G_k de la question précédente qui donne votre montant gagné ou perdu selon les résultats. Trouver la loi de X (les valeurs prises par X et leurs probabilités respectives).

Solution : Pour la variable aléatoire, il suffit de prendre une somme de fonction indicatrice

$$X = \sum_{k=1}^3 2^k 1_{G_k} + (-100) 1_{G_0} .$$

Les valeurs possibles sont 8, 4, 2 et -100 avec les probabilités correspondantes aux G_k .

Solution à l'exercice 56 Énoncé

On choisit deux entiers X et Y de manière indépendante et identique avec probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 2^{-k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

(a) Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 1/3$.

Solution : Nous avons

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

(b) Montrer que $\mathbb{P}(X < Y) = 1/3$.

Solution : Nous avons clairement que $\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(X < Y)$. Donc

$$2\mathbb{P}(Y < X) + \mathbb{P}(Y = X) = 1 .$$

D'où le résultat.

(c) On considère maintenant la variable aléatoire $\min\{X, Y\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\min\{X, Y\} > k) = \frac{1}{4^k} .$$

Utiliser ce résultat pour calculer $\mathbb{E}(\min\{X, Y\})$.

Solution : Nous avons que

$$\mathbb{P}(\min\{X, Y\} > k) = \mathbb{P}(X > k, Y > k) = \frac{1}{4^k} .$$

Nous pouvons utiliser directement la formule

$$\mathbb{E}(\min\{X, Y\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \geq j) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \frac{4}{3}.$$

Si on ne se souvient pas de la formule, on utilise

$$\mathbb{P}(\min\{X, Y\} = k) = 4^{k-1} - 4^k = \frac{3}{4^k}.$$

(d) Démontrer que la probabilité de l'événement $\{X \text{ divise } Y\}$ est donnée par

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1} - 1}.$$

Indice : Un nombre x divise un entier y si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = my$.

Solution : Nous avons que X divise Y si et seulement si $Y = mX$ pour un m donné. Donc

$$\mathbb{P}(X \text{ divise } Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = mX) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = mk, X = k)$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \text{ divise } Y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-mk} 2^{-k} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(m+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{-(m+1)}}{1 - 2^{-m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1} - 1} \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 57 Énoncé

On choisit deux entiers X et Y de manière indépendante et identique avec probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{2}{3^k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

(a) Calculer la probabilité que X soit un nombre pair. Calculer la probabilité que X et Y soient pairs.

Solution : La probabilité que X soit un nombre pair est donnée par

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = \frac{1}{4}.$$

Comme Y est indépendant et identiquement distribué, la probabilité que X et Y soient pairs est $1/16$.

- (b) On considère maintenant la variable aléatoire $\max\{X, Y\}$. Calculer $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k)$.

Solution : On a, par indépendance,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq k) &= \mathbb{P}(X \leq k, Y \leq k) \\ &= \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k) \\ &= \mathbb{P}(X \leq k)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{2}{3^i} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{3^k} \right)^2. \end{aligned}$$

- (c) Pour m , un entier quelconque, trouver la probabilité que m divise X .

Solution : Rappelons que m divise X si et seulement s'il existe k tel que $X = mk$. La probabilité que m divise est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = mk) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{mk}} \\ &= \frac{2}{3^m - 1} \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 58 Énoncé

Soit X_n une variable de loi binomiale avec paramètres n et p . On pose $\lambda = np$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

où Y est une variable aléatoire de loi Poisson avec paramètre λ .

Solution : Par définition, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{n^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{k! \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}. \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand et λ raisonnable, on a

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \approx e^{-\lambda} \quad \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \approx 1 \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$$

ce qui signifie que

$$\mathbb{P}(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Cela complète la démonstration.

Solution à l'exercice 59 Énoncé

Soit un parieur avec une fortune de i \$. Il joue à un jeu pour lequel il gagne 1 \$ avec probabilité p et perd 1 \$ avec probabilité $q = 1 - p$. On note par X_k le résultat du k -ième pari. Le joueur décide de jouer jusqu'à ce qu'il soit ruiné (sa fortune est à 0 \$) ou jusqu'à ce qu'il atteigne M \$ ($M > i$). Chaque jeu est indépendant de tous les précédents.

(a) Donner une expression simple de S_n en fonction des paris à chaque tour.

Solution : Soit X_1, X_2, \dots, X_n le résultat des paris au tour $1, 2, \dots, n$. Alors

$$S_n = i + \sum_{k=1}^n X_k.$$

(b) On pose

$$\tau_i = \min\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = M | S_0 = i\},$$

le **temps d'arrêt** du processus. Le jeu s'arrête toujours au temps (aléatoire) τ_i et le résultat est S_{τ_i} . On veut évaluer la probabilité que le parieur gagne (obtienne M \$)

avant d'être ruiné. Notons $P_i = \mathbb{P}(S_{\tau_i} = M)$, la probabilité qu'il gagne. Quelles sont les conditions aux limites de la suite P_i , c'est-à-dire que valent P_0 et P_M ?

Solution : Puisqu'à 0 le parieur est déjà ruiné et qu'à M il a déjà gagné, on a

$$P_0 = 0 \quad P_M = 1.$$

- (c) Conditionner la probabilité sur le résultat du premier jeu afin d'obtenir une expression pour P_i en fonction de P_{i-1} et P_{i+1} et montrer que

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}). \quad (2)$$

Solution : Puisque le résultat du premier jeu est $+1$ avec probabilité p et -1 avec probabilité q , on a

$$P_i = qP_{i-1} + pP_{i+1}.$$

Puisque $p + q = 1$, on peut réécrire

$$P_i = qP_i + pP_i$$

pour obtenir

$$qP_i + pP_i = qP_{i-1} + pP_{i+1}.$$

On obtient l'égalité recherchée en isolant.

- (d) Montrer que

$$P_{i+1} - P_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i P_1, \quad 0 < i < M.$$

Solution : En utilisant l'équation (2) et le fait que $P_0 = 0$, on a

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1$$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

...

$$P_{i+1} - P_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i P_1.$$

(e) Utiliser le fait que

$$P_{i+1} - P_1 = \sum_{k=1}^i (P_{k+1} - P_k)$$

(série télescopique) pour obtenir une expression pour P_{i+1} .

Solution : La somme télescopique permet d'écrire

$$\begin{aligned} P_{i+1} - P_1 &= \sum_{k=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k P_1 \\ P_{i+1} &= P_1 + P_1 \sum_{k=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k \\ &= P_1 \sum_{k=0}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k \end{aligned}$$

Avec cette série géométrique partielle, on obtient

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} & \text{si } p \neq q \\ P_1(i+1) & \text{si } p = q. \end{cases}$$

(f) Poser $i = M - 1$ dans la solution de la partie précédente et utiliser le fait que $P_M = 1$ pour trouver une expression pour P_1 et P_i .

Solution : On a

$$1 = P_M = \begin{cases} P_1 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} & \text{si } p \neq q \\ P_1(M) & \text{si } p = q, \end{cases}$$

duquel on conclut que

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M} & \text{si } p \neq q \\ \frac{1}{M} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Finalement, en remplaçant cette expression de P_1 dans celle de P_i , on obtient

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M} & \text{si } p \neq q \\ \frac{i}{M} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Notons au passage que $1 - P_i$ est la probabilité de ruine du parieur.

(g) Laisser tendre M vers l'infini dans la solution pour P_i . Interpréter les résultats.

Solution : Si M est infiniment grand, on peut voir cela comme un budget illimité pour le casino (ou celui contre qui le joueur joue). Le parieur jouera donc jusqu'à ce qu'il soit ruiné (s'il le devient). Il tente donc de devenir infiniment riche. Lorsque $p = q$, on voit immédiatement que la probabilité de devenir infiniment riche est 0. Même avec un jeu équitable, on est donc condamné à se ruiner.

Pour $p \neq q$, le ratio q/p peut être plus petit que 1, si $p > q$, auquel cas le jeu est en faveur du parieur et la probabilité de devenir infiniment riche est de

$$1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i > 0.$$

Par contre, si $p < q$ et le jeu n'est pas en faveur du parieur, la probabilité de devenir infiniment riche tombe à 0.

Ce problème est souvent appelé pour cette raison **la ruine du parieur**. Remarque additionnelle : il faudrait justifier le fait que S_n atteigne un jour ou bien 0, ou bien M pour être rigoureux. Pouvez-vous montrer que les limites peuvent être atteintes ?

Solution à l'exercice 60

Énoncé

Un jeu de casino propose des mises à 1 \$ aux joueurs et offre une probabilité de gain pour le joueur de $p = 0,45$. Si un joueur décide de jouer 5 \$ jusqu'à ce qu'il se ruine ou qu'il possède 10 \$, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas ruiné ?

Solution : On utilise l'exercice 21 pour calculer la probabilité voulue :

$$P_5 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^5}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{10}} \approx 0,2683$$

Solution à l'exercice 61

Énoncé

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ une marche aléatoire où les X_k sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = q, p + q = 1$. Supposons que $S_0 = 0$. Si $a, b > 0$ sont des entiers, quelle est la probabilité que S_n atteigne a avant d'atteindre $-b$?

Indice : Utiliser l'exercice 59.

Solution : On commence à 0, et on veut atteindre a avant d'atteindre b . Puisque chaque épreuve est indépendante des autres, effectuons une translation de b unités à

toutes les quantités présentes. On veut maintenant atteindre $a + b$ avant 0, en partant de b . Ceci est un cas typique de la ruine du parieur résolu au problème 59. On obtient

$$\mathbb{P}(S_n \text{ atteint } a \text{ avant } -b) = \begin{cases} \frac{1 - (\frac{q}{p})^b}{1 - (\frac{q}{p})^{a+b}} & \text{si } p \neq q \\ \frac{b}{a+b} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Solution à l'exercice 62 Énoncé

Une urne contient 3 billes noires et 4 billes blanches. On tire deux billes de l'urne sans remise et on s'intéresse au nombre de billes de chaque couleur. Quelle est la distribution de cette variable aléatoire (valeurs possibles et leur probabilité respective) ?

Solution : Les valeurs possibles sont $(0, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 0)$ où la première coordonnée représente le nombre de billes noires et la deuxième le nombre de billes blanches. Les probabilités respectives sont $\binom{4}{2}/\binom{7}{2}$, $\binom{4}{1}\binom{3}{1}/\binom{7}{2}$ et $\binom{3}{2}/\binom{7}{2}$.

Il sera question dans la section 6 de densité conjointe de variables aléatoires ressemblant à la situation de cet exercice.

Solution à l'exercice 63 Énoncé

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p . Montrer que

$$\mathbb{P}(X = n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X = k)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Cette propriété s'appelle **la perte de mémoire** de la loi géométrique.

Solution : En utilisant la définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n + k \mid X > n) &= \frac{\mathbb{P}(X = n + k)}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &= \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^n} \\ &= p(1-p)^{k-1} \\ &= \mathbb{P}(X = k). \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 64 Énoncé

Le nombre de clients qui entrent dans une chaîne de restaurant pendant la période de

pointe est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. Une nouvelle publicité augmente ce paramètre λ à 24. Il y a 80 % des restaurants de la chaîne qui ont utilisé la nouvelle publicité. Si un restaurant de cette chaîne est visité par 25 clients, quelle est la probabilité qu'il ait utilisé la publicité ?

Solution : Soit N le nombre de clients qui visitent et $\mathbb{I}_{\{pub\}}$ la variable indiquant si la publicité a été utilisée. On cherche

$$\mathbb{P}(\mathbb{I}_{\{pub\}} = 1 \mid N = 25) =$$

$$\frac{\mathbb{P}(N = 25 \mid \mathbb{I}_{\{pub\}} = 1) \mathbb{P}(\mathbb{I}_{\{pub\}} = 1)}{\mathbb{P}(N = 25 \mid \mathbb{I}_{\{pub\}} = 1) \mathbb{P}(\mathbb{I}_{\{pub\}} = 1) + \mathbb{P}(N = 25 \mid \mathbb{I}_{\{pub\}} = 0) \mathbb{P}(\mathbb{I}_{\{pub\}} = 0)}.$$

La loi de N sachant que la publicité a été utilisée est une Poisson avec paramètre 24 alors que la loi de N sachant que la publicité n'a pas été utilisée est une Poisson avec paramètre 20. Ceci nous donne

$$\mathbb{P}(\mathbb{I}_{\{pub\}} = 1 \mid N = 25) = \frac{\frac{e^{-24} 24^{25}}{25!} \times 0,8}{\frac{e^{-24} 24^{25}}{25!} \times 0,8 + \frac{e^{-20} 20^{25}}{25!} \times 0,2} \approx 0.8748.$$

Solution à l'exercice 65 Énoncé

Comparer l'approximation par la loi de Poisson de la variable binomiale X avec les véritables probabilités pour les valeurs ci-dessous :

1. $n = 7, p = 0,1, k = 1,$
2. $n = 9, p = 0,95, k = 8,$
3. $n = 10, p = 0,2, k = 0,$
4. $n = 10, p = 0,2, k = 5.$

Solution : Voici un tableau donnant les véritables valeurs, leur approximation et la différence :

| Triplet (n,p,k) | Probabilité binomiale | Approximation | Différence absolue |
|-----------------|-----------------------|---------------|--------------------|
| (7, 0,1, 1) | 0,3720087 | 0,3476097 | 0,024399 |
| (9, 0,95, 8) | 0,2985 | 0,1263 | 0,1722 |
| (10, 0,2, 0) | 0,10737 | 0,13534 | 0,02797 |
| (10, 0,2, 5) | 0,02642 | 0,03609 | 0,00967 |

Solution à l'exercice 66 Énoncé

Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ . Montrer que

$$\mathbb{P}(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}).$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \text{ soit pair}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

et par le fait même,

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

En additionnant e^x et e^{-x} , on retrouve les termes pairs en double, alors que les termes impairs s'annulent entre eux. On a donc

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Cette identité permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \text{ soit pair}) &= e^{-\lambda} \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}). \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 67 Énoncé

La loi binomiale permet de modéliser le nombre de succès parmi un certain nombre d'épreuves de Bernoulli. L'un des exemples auquel s'applique la loi binomiale est celui du tirage de bille avec remise d'une urne. Si une bille contient N billes, dont m sont blanches et $N - m$ sont noires et que l'on désigne par Y le nombre de billes blanches tirées lors d'un échantillon de n billes prises avec remise, alors Y suit une loi binomiale avec paramètre n et $p = m/N$.

Soit X le nombre de billes blanches tirées lors d'un échantillon de n billes prises *sans remise*. On dit que X est une variable aléatoire de loi hypergéométrique. Son nom vient de l'apparition des **séries hypergéométriques** dans les différentes fonctions génératrices (moments, probabilités, caractéristique) de la variable aléatoire.

(a) Quelles sont les valeurs possibles pour la variable X ?

Solution : Pour un tirage avec remise, les valeurs possibles vont évidemment de 0 à n , mais lorsque le tirage est effectué sans remise, le domaine change. D'abord, le maximum possible sera soit n , le nombre de tirages, ou soit m , le nombre de billes blanches disponibles. Ainsi, $X \leq \min(m, n)$. Le minimum lui, dépendra du nombre de billes noires disponibles. On a $\max(0, n - (N - m)) \leq X$. Nous verrons ci-dessous que les conventions adoptées lors de la définition du coefficient binomial permettront de ne pas se soucier du domaine de X .

(b) Trouver une expression pour $\mathbb{P}(X = i)$.

Solution : On doit choisir i billes blanches parmi les m disponibles. Pour chaque choix de billes blanches, on doit également choisir $n - i$ billes noires parmi les $N - m$ disponibles. Ceci produit donc un total de $\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i}$ combinaisons. Au total, on aurait pu choisir n billes parmi les N disponibles, ce qui donne

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

Comme il a été mentionné plus haut, le coefficient binomial $\binom{m}{i}$ vaut 0 lorsque $i < 0$ ou $m < i$, ce qui fait en sorte qu'il n'est pas nécessaire de spécifier le domaine de X .

4.2 Espérance et moments

Solution à l'exercice 68 Énoncé

Nous considérons une urne contenant 10 boules : 4 rouges, 4 noires et 2 blanches. Pour cette question, nous effectuons une suite infinie de tirages consécutifs *avec remise*. Les tirages sont indépendants. Un casino offre le pari suivant : Si une boule blanche est tirée à la i -ième épreuve, le joueur reçoit m_b dollars. Si une boule rouge est tirée, le joueur perd m_r dollars. Si une boule noire est tirée, aucun argent n'est échangé.

Nous considérons la variable aléatoire X_n le gain/perte du joueur au n -ième tirage, et la variable aléatoire

$$G_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

le gain/perte total du joueur après n tirages.

- (a) Trouver $\mathbb{E}(G_n)$ en fonction de n , m_b et m_r .

Solution : Nous avons par linéarité de l'espérance que

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1)$$

la dernière égalité, car chaque tirage est identique. Donc

$$\mathbb{E}(G_n) = n(m_b \frac{1}{5} - m_r \frac{2}{5}) = \frac{n}{5}(m_b - 2m_r).$$

- (b) Si $m_b = +2$, quelle doit être la valeur de m_r pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que $\mathbb{E}(G_n) = 0$?

Solution : Le jeu est équitable si et seulement si $m_b - 2m_r = 0$. Donc si $m_b = 2$ nous devons avoir $m_r = 1$.

Solution à l'exercice 69 Énoncé

Soit X une variable de loi géométrique avec paramètre $p = 1/2$.

On définit la variable aléatoire suivante :

$$Y = \min\{X, 4\}$$

Ici, $\min\{X, 4\}$ est le minimum entre X et 4. Par exemple, si X prend la valeur 3 alors $\min\{X, 4\} = 3$ alors que si $X = 5$, $\min\{X, 4\} = 4$.

- (a) Trouver la loi de Y (valeurs possibles et leur probabilité respective).

Solution : Les valeurs possibles sont 1, 2, 3, 4, car si $X > 4$, alors $\min\{X, 4\} = 4$. Les probabilités respectives sont

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} & \mathbb{P}(Y = 2) &= \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(Y = 3) &= \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8} & \mathbb{P}(Y = 4) &= \mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Solution :

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = 15/8$$

(c) Nous définissons $Z = \max\{X, 4\}$, le maximum entre X et 4. Montrer que $Y + Z = X + 4$.

Solution : Pour $X = k$, nous aurons soit $k > 4$, $k < 4$, ou $k = 4$. Donc $\max\{k, 4\} + \min\{k, 4\} = k + 4$.

(d) Trouver $\mathbb{E}(Z)$.

Solution : Par la linéarité, on a $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + 4 - \mathbb{E}(Y) = 2 + 4 - 15/8 = 33/8$.

Solution à l'exercice 70 Énoncé

Une personne collectionne des coupons. Chaque jour, elle a la chance d'acquérir l'un des n coupons disponibles ayant la même probabilité. Si elle commence avec une collection vide, dans combien de jours en moyenne peut-elle s'attendre à avoir une pleine collection ?

Solution : Soit N le nombre de jours avant d'avoir tous les coupons. Soit N_1 le nombre de jours pour obtenir un premier coupon, N_2 le nombre de jours à partir de N_1 pour obtenir un coupon différent du premier, N_3 le nombre de jours à partir de N_2 pour obtenir un coupon différent des deux premiers et ainsi de suite jusqu'à N_n le nombre de jours à partir de N_{n-1} pour obtenir le dernier coupon de la collection. Alors $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$. De plus, N_k est une variable géométrique de paramètre $p = \frac{n-k+1}{n}$ et donc,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(N_k) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On peut écrire cette espérance comme nH_n où H_n est le n -ième **nombre harmonique**.

Solution à l'exercice 71 Énoncé

À l'exercice 53, on a introduit la loi binomiale négative. La distribution d'une variable X qui est binomiale négative est

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

- (a) Trouver une relation de récurrence pour l'espérance en conditionnant sur le résultat de la première épreuve et résoudre cette relation.

Solution : Soit M_r le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour avoir r succès. Si le premier résultat est un succès, alors on a 1 épreuve effectuée et on a besoin en moyenne de M_{r-1} autres épreuves. Ceci se produit avec probabilité p . Si, par contre, le premier succès est un échec, alors on a 1 épreuve effectuée et on a besoin en moyenne de M_r autres épreuves. Ceci se produit avec probabilité $1 - p$. Ceci signifie que

$$M_r = p + pM_{r-1} + (1 - p) + (1 - p)M_r.$$

En réécrivant, on obtient $M_r = \frac{1}{p} + M_{r-1}$. Puisque $M_0 = 0$, on obtient $M_r = \frac{r}{p}$.

- (b) Écrire X comme une somme de variables aléatoires géométriques appropriées pour calculer l'espérance et la variance de X .

Solution : On peut écrire

$$X = \sum_{k=1}^r G_k$$

où G_k est le temps entre le $k - 1$ -ième succès et le k -ième. Il suit de cela que chaque G_k est une variable géométrique de paramètre p ET indépendantes les unes des autres. Étant donné ceci, et le fait que l'espérance d'une géométrique est $1/p$ et sa variance $(1 - p)/p^2$, on a

$$\mathbb{E}(X) = r\mathbb{E}(G_1) = \frac{r}{p}$$

et

$$\text{Var}[X] = r\text{Var}[G_1] = \frac{r(1 - p)}{p^2}.$$

Solution à l'exercice 72 Énoncé

À l'exercice 67, la loi hypergéométrique a été définie.

- (a) Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi hypergéométrique,

Indice : écrire X comme une somme de fonctions indicatrices.

Solution : Soit B_i l'événement *la i -ième bille tirée est blanche*. Alors on a

$$X = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{B_i\}}.$$

Il suit de la linéarité de l'espérance que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_i\}}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathbb{I}_{\{B_i\}}).$$

Comme $\mathbb{P}(B_i) = m/N$ pour tout i (pourquoi?), on a $\mathbb{E}(X) = \frac{nm}{N}$. Comparer cette espérance avec celle de la loi binomiale ayant les mêmes paramètres.

(b) Montrer que la variance de X est donnée par

$$\text{Var}[X] = n \frac{m}{N} \frac{N-m}{N} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

et comparer celle-ci avec la variance d'une loi binomiale de mêmes paramètres que X .

Solution : On pourrait être tenté d'écrire

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[\mathbb{I}_{\{B_i\}}],$$

cependant, puisque les tirages se font sans remise, il n'y a pas indépendance entre les B_i . On ne peut donc pas faire la somme des variances. On doit calculer les covariances entre $\mathbb{I}_{\{B_i\}}, \mathbb{I}_{\{B_j\}}$ et en faire la somme. Pour $i = j$, on a

$$\text{Cov}[\mathbb{I}_{\{B_i\}}, \mathbb{I}_{\{B_i\}}] = \text{Var}[\mathbb{I}_{\{B_i\}}] = \frac{m}{N} \frac{N-m}{N}.$$

Rappelons que $\mathbb{I}_{\{A \cap B\}} = \mathbb{I}_{\{A\}} \times \mathbb{I}_{\{B\}}$. Rappelons également que $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ceci nous donne

$$\text{Cov}[\mathbb{I}_{\{B_i\}}, \mathbb{I}_{\{B_j\}}] = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_i\}} \mathbb{I}_{\{B_j\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_i\}}) \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_j\}}).$$

On a $\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_i\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_j\}}) = m/N$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_i\}} \mathbb{I}_{\{B_j\}}) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{B_i \cap B_j\}}) \\ &= \mathbb{P}(B_i \cap B_j) \\ &= \mathbb{P}(B_j | B_i) \mathbb{P}(B_i) \\ &= \frac{m-1}{N-1} \frac{m}{N}. \end{aligned}$$

Pour les covariances, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbb{I}_{\{B_i\}}, \mathbb{I}_{\{B_j\}}] &= \frac{m-1}{N-1} \frac{m}{N} - \left(\frac{m}{N} \right)^2 \\ &= \frac{m}{N} \frac{N-m}{N} \frac{1}{N-1} \end{aligned}$$

Finalement, pour la variance, il y a n termes de la forme $Cov[\mathbb{I}_{\{B_i\}}, \mathbb{I}_{\{B_i\}}]$ et $2\binom{n}{2} = n(n-1)$ termes de la forme $Cov[\mathbb{I}_{\{B_i\}}, \mathbb{I}_{\{B_j\}}]$, ce qui donne

$$\begin{aligned} Var[X] &= n \frac{m}{N} \frac{N-m}{N} - n(n-1) \frac{m}{N} \frac{N-m}{N} \frac{1}{N-1} \\ &= n \frac{m}{N} \frac{N-m}{N} \left(\frac{N-n}{N-1} \right). \end{aligned}$$

On constate que la variance d'une loi hypergéométrique est la variance d'une loi binomiale de paramètres $n, p = m/N$ affectée d'un coefficient de correction qui vaut $\frac{N-n}{N-1}$. En particulier, lorsque le nombre de billes est grand par rapport à l'échantillonnage, ce terme tend vers 1 et l'hypergéométrique se comporte presque comme une loi binomiale.

Solution à l'exercice 73 Énoncé

Supposons qu'un casino propose le jeu suivant : le joueur jette une pièce de monnaie jusqu'à l'apparition du premier pile. Si celui-ci survient au lancer n , il reçoit 2^n dollars. Posons X le montant gagné lors de ce jeu. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution : La probabilité que le premier pile survienne au lancer n est donnée par $1/2^n$. Comme le montant obtenu est aussi 2^n , on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n / 2^n = \infty.$$

On a ici un exemple d'une variable aléatoire discrète avec espérance infinie. Combien seriez-vous prêt à payer pour jouer à un tel jeu ? Ce problème est souvent connu sous le nom de paradoxe de Saint-Pétersbourg.

Solution à l'exercice 74 Énoncé

Soit X une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(X) = 1$ et $Var[X] = 2$ et Y une variable aléatoire indépendante de X avec $\mathbb{E}(Y) = 2$ et $Var[Y] = 1$.

(a) Calculer $\mathbb{E}((X+Y)^2)$.

Solution : On a $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$. On calcule $\mathbb{E}(X^2)$ avec la formule

$$Var[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

pour obtenir $\mathbb{E}(X^2) = 3$. D'une manière analogue, on trouve $\mathbb{E}(Y^2) = 5$. Avec la linéarité de l'espérance et l'indépendance entre X et Y (nécessaire pour le

produit XY), on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X + Y)^2) &= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= 3 + 2 \times 1 \times 2 + 5 \\ &= 12.\end{aligned}$$

(b) Calculer $Var[2X - 3Y]$.

Solution : Puisque l'on a indépendance, on peut prendre la somme des variances, ainsi

$$\begin{aligned}Var[2X - 3Y] &= Var[2X] + Var[-3Y] \\ &= 4Var[X] + 9Var[Y] \\ &= 4 \times 2 + 9 \times 1 \\ &= 17.\end{aligned}$$

Solution à l'exercice 75 Énoncé

On reprend le scénario des séries quatre de sept de l'exercice 10. On estime que les Canadiens de Montréal ont une probabilité p de gagner un match indépendamment du résultat des matchs précédents.

(a) Quelle est la probabilité que la série soit gagnée par les Canadiens en i matches ?

Solution : La probabilité est donnée par

$$\binom{i-1}{3} p^4 (1-p)^{i-4}$$

(b) Si $p = 1/2$, trouver le nombre de matches joués en moyenne.

Solution : Pour $p = 1/2$, l'espérance est donnée par

$$2 \sum_{i=4}^7 i \binom{i-1}{3} p^4 (1-p)^{i-4},$$

le facteur 2 devant la somme tenant compte du fait qu'autant Montréal que Boston peut l'emporter.

Solution à l'exercice 76 **Énoncé**

Soit N une variable aléatoire à valeurs entières non négatives, soit dans $\{1, 2, 3, \dots\}$.
Montrer que

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i).$$

Indice : Considérer l'identité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \mathbb{P}(N = k)$$

et changer l'ordre de sommation.

Solution : L'identité donnée dans l'indice vient du fait que

$$\mathbb{P}(N \geq i) = \sum_{k=i}^{\infty} \mathbb{P}(N = k).$$

Considérons la matrice de dimension infinie suivante

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{P}(N = 1) & 0 & 0 & \dots \\ \mathbb{P}(N = 2) & \mathbb{P}(N = 2) & 0 & \dots \\ \mathbb{P}(N = 3) & \mathbb{P}(N = 3) & \mathbb{P}(N = 3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

La somme de la colonne i correspond à la probabilité $\mathbb{P}(N \geq i)$. La somme de toutes les colonnes donne donc $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq i)$. On peut inverser l'ordre de sommation, en sommant en premier sur les lignes et ensuite sur les colonnes. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(N = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(N = k) \\ &= \mathbb{E}(N). \end{aligned}$$

5 Variables aléatoires continues

5.1 Fonction de répartition

Solution à l'exercice 77 Énoncé

Nous choisissons un nombre aléatoire X sur \mathbb{R} à l'aide de la fonction de répartition suivante

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} \frac{1}{7}e^{-|x|} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{7}(x+2) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{7}(x+3) & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{7}e^{-(x-2)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

- (a) Trouver les valeurs a de X pour lesquelles $\mathbb{P}(X = a) > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X = a)$ pour ces valeurs.

Solution : On voit que les sauts se situent à 0, 1 et 2. Nous avons

$$\mathbb{P}(X = 0) = F(0) - F(0^-) = 1/7 \quad \mathbb{P}(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 1/7$$

et

$$\mathbb{P}(X = 2) = F(2) - F(2^-) = 1/7.$$

- (b) Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

Solution : On a que $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - F(2) = 1/7$. De plus, $\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X > 2) + \mathbb{P}(X = 2) = 2/7$.

- (c) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, trouver la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X > x\}$ sachant que $\{X > 2\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X > x | X > 2)$.

Solution : La probabilité conditionnelle est simplement

$$\mathbb{P}(X > x | X > 2) = \frac{\mathbb{P}(X > x, X > 2)}{\mathbb{P}(X > 2)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{\mathbb{P}(X > x)}{\mathbb{P}(X > 2)} = \frac{\frac{1}{7}e^{-(x-2)}}{1/7} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- (d) Montrer que la fonction définie par $F_{>2}(x) := 1 - \mathbb{P}(X > x | X > 2)$ est une fonction de répartition.

Est-ce que $F_{>2}(x)$ peut s'exprimer en termes d'une densité ?

Solution : Par la forme précédente, on a que $F_{>2}(x) = 1 - e^{-(x-2)}$ pour $x > 2$ est une fonction de répartition avec densité $e^{-(x-2)}$ sur $x > 2$.

La fonction de répartition $F_{>2}$ donne la loi conditionnelle de X sachant que $X > 2$.

(e) À l'aide de $F_{>2}$, calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $X > 2$.

Solution : Il s'agit de faire la moyenne, donc $\int_2^\infty xe^{-(x-2)}dx = 2 + 1 = 3$.

Solution à l'exercice 78

Énoncé

Nous choisissons un nombre aléatoire X sur \mathbb{R} à l'aide de la fonction de répartition suivante

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} \frac{x^2}{6} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{6} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{1}{6}e^{-(x-3)} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

(a) Trouver les valeurs a de X pour lesquelles $\mathbb{P}(X = a) > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X = a)$ pour ces valeurs.

Solution : Le seul saut se situe à $X = 2$ et $\mathbb{P}(X = 2) = 1/6$.

(b) Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

Solution : Nous avons que $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - F(2) = 1/2$. De plus, $\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X > 2) + \mathbb{P}(X = 2) = 2/3$.

(c) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, trouver la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X > x\}$ sachant que $\{X > 2\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X > x | X > 2)$.

Solution : La probabilité conditionnelle est simplement

$$\mathbb{P}(X > x | X > 2) = \frac{\mathbb{P}(X > x, X > 2)}{\mathbb{P}(X > 2)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{2x}{3} + \frac{7}{3} & \text{si } 2 < x < 3 \\ \frac{1}{3}e^{-(x-3)} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(d) Montrer que la fonction définie par $F_{>2}(x) := 1 - \mathbb{P}(X > x | X > 2)$ est une fonction de répartition.

Est-ce que $F_{>2}(x)$ peut s'exprimer en termes d'une densité ?

Solution : Par la forme précédente, on a que $F_{>2}(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x | X > 2)$ pour $x > 2$ est une fonction de répartition avec densité $2/3$ sur $2 \leq x < 3$ et $\frac{1}{3}e^{-(x-3)}$ si $x \geq 3$.

La fonction de répartition $F_{>2}$ donne la loi conditionnelle de X sachant que $X > 2$.

(e) À l'aide de $F_{>2}$, calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $X > 2$.

Solution : Il s'agit de faire la moyenne, donc $\int_2^3 x \cdot 2/3 dx + \int_3^\infty x e^{-(x-3)}/3 = 5/3 + 4 = 17/3$.

Solution à l'exercice 79

Énoncé

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes.

(a) Montrer que $c = 3/2$.

Solution : Nous avons que

$$1 = \int_{-1}^1 c(x^2 - x^3) dx = \frac{2}{3} c .$$

Donc, $c = 3/2$.

(b) Trouver la fonction de répartition $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution : Par définition, $F_X(x) = 0$ si $x < -1$ et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$. Pour $0 \leq x \leq 1$, nous avons

$$F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{3}{2} y^2(1-y) dy = \frac{3}{2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-1}^x = \frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{12} \right)$$

Solution à l'exercice 80

Énoncé

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1+x)(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes.

(a) Trouver c .

Solution : Nous avons que

$$1 = \int_{-1}^1 c(1 - x^2)dx = c \frac{4}{3}.$$

Donc, $c = 3/4$.

(b) Trouver la fonction de répartition $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution : Par définition, $F_X(x) = 0$ si $x < -1$ et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$. Pour $0 \leq x \leq 1$, nous avons

$$F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{3}{4}(1 - y^2)dy = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} \right)$$

Solution à l'exercice 81

Énoncé

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Montrer que pour $x > 0$,

$$\mathbb{P}(|Z| > x) = 2\mathbb{P}(Z > x).$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(|Z| < x) = 2\mathbb{P}(Z < x) - 1.$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z| > x) &= \mathbb{P}(\{Z < -x\} \cup \{Z > x\}) \\ &= \mathbb{P}(Z < -x) + \mathbb{P}(Z > x) \\ &= \mathbb{P}(-Z > x) + \mathbb{P}(Z > x) \end{aligned}$$

Comme Z est une variable aléatoire symétrique : $\mathbb{P}(-Z > x) = \mathbb{P}(Z > x)$ d'où la réponse. Dans le deuxième cas, il suffit de prendre

$$\mathbb{P}(|Z| > x) = 2 - 2\mathbb{P}(Z < x).$$

(Ici on utilise le fait que $\mathbb{P}(Z = x) = 0$.) Donc

$$\mathbb{P}(|Z| < x) = 1 - \mathbb{P}(|Z| > x) + \mathbb{P}(|Z| = x) = 2\mathbb{P}(Z < x) - 1.$$

Solution à l'exercice 82 Énoncé

Soit X une variable aléatoire de densité f_X . Trouver la densité de la variable aléatoire $aX + b$, $a > 0$.

Solution : La fonction de répartition de $aX + b$ est simplement

$$F_{aX+b}(y) = \mathbb{P}(aX + b \leq y) = \mathbb{P}(X \leq (y - b)/a) = F_X((y - b)/a)$$

Pour obtenir la densité, il suffit de dériver la fonction de répartition

$$f_{aX+b}(y) = \frac{d}{dy} F_{aX+b}(y) = \frac{d}{dy} F_X((y-b)/a) = f_X((y-b)/a) \frac{d}{dy} \left(\frac{y-b}{a} \right) = \frac{1}{a} f_X((y-b)/a),$$

où on a utilisé une dérivation en chaîne. Noter que la densité est de la même forme !

Question : où a-t-on utilisé le fait que $a > 0$?

Solution à l'exercice 83 Énoncé

Pour chacune des variables aléatoires suivantes, trouver une expression pour la fonction de répartition pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) On considère une variable aléatoire X de loi Bernoulli de paramètre p .

Solution : Puisque les valeurs possibles pour X sont $\{0, 1\}$, on aura $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ pour $x \geq 1$. De plus, on a $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. La fonction de répartition est donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) On considère une variable aléatoire X de loi binomiale avec paramètres n, p .

Solution : Les valeurs possibles ici sont les entiers de 0 à n . La fonction de répartition sera donc nulle avant 0 et vaudra 1 après n . Pour le reste, on aura une fonction constante par parties. On utilise le fait que

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i)$$

pour k un entier entre 0 et n . Si $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à

x , alors la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

Certains auteurs utilisent la **fonction bêta incomplète** (voir le bas de la page) pour écrire cette fonction de répartition.

- (c) On considère une variable aléatoire X de loi géométrique avec paramètre p .

Solution : Ici, les valeurs possibles pour X sont les entiers $\{1, 2, 3, \dots\}$. La fonction de répartition sera donc une fonction constante par parties sur tout l'intervalle $(0, \infty)$. Puisque $\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = 1 - (1-p)^k$ pour un entier k , La fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- (d) On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson avec paramètre λ .

Solution : Les valeurs possibles ici sont les entiers $\{0, 1, 2, \dots\}$. La fonction sera une fois de plus constante par parties sur l'intervalle $[0, \infty)$. Comme pour la loi binomiale, on peut écrire

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i)$$

pour un entier k . On obtient donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Certains auteurs utilisent la **fonction gamma incomplète** pour écrire la fonction de répartition.

5.2 Variables continues

Solution à l'exercice 84 Énoncé

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit la variable aléatoire

$$Y := \frac{1}{X^2}.$$

- (a) Est-ce que cette variable aléatoire est bien définie ?

Solution : Y est bien définie, car $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.

- (b) Trouver la loi de Y , c'est-à-dire les valeurs possibles et la densité.

Solution : Nous avons que Y a des valeurs dans $[1, \infty)$.

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \geq 1/y) = \mathbb{P}(X \geq 1/\sqrt{y}) + \mathbb{P}(X \leq -1/\sqrt{y})$$

Or,

$$\mathbb{P}(X \geq 1/y) = 1 - F_X(1/\sqrt{y}) \quad \mathbb{P}(X \leq -1/\sqrt{y}) = F_X(-1/\sqrt{y})$$

Donc, la densité est donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{1}{2y^{3/2}} (f_X(1/\sqrt{y}) + f_X(-1/\sqrt{y})) \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{y^{3/2}} \left(\frac{1}{y} (1 - y^{-1/2}) + \frac{1}{y} (1 + y^{-1/2}) \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{y^{5/2}} \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 85 Énoncé

Un nombre aléatoire X est choisi avec la densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1+x)(1-x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit la variable aléatoire

$$Y := \frac{1}{X+1}.$$

Quelles sont les valeurs prises par Y ? Trouver une expression pour la fonction de répartition de Y .

Solution :

Y prend des valeurs de $1/2$ à l'infini. Nous avons que $\{\frac{1}{1+X} \leq y\} = \{X \geq \frac{1-y}{y}\}$. Donc pour $y \geq 1/2$,

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \geq \frac{1-y}{y}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1-y}{y} - \frac{(1-y)^3}{3y^3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4y^3} (-2y^3 + 3y - 1)$$

Solution à l'exercice 86 Énoncé

La taille d'un homme âgé de 25 ans est une variable aléatoire de loi normale de paramètres $\mu = 175$ et $\sigma^2 = 36$.

(a) Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 185 cm ?

Solution : Soit T la variable aléatoire représentant la taille. Par hypothèse, on a $T \sim \mathcal{N}(175, 36)$. On cherche

$$\mathbb{P}(T > 185) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 185) .$$

On exprime T en fonction d'une variable normale standard. On a

$$T = \sigma Z + \mu$$

où Z est une variable aléatoire standard. Donc

$$1 - \mathbb{P}(T \leq 185) = 1 - \mathbb{P}(6Z + 175 \leq 185) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 5/3) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1,67) \approx 0,05 .$$

La dernière probabilité peut être évaluée à l'aide d'une table de la loi normale. La réponse est donc environ 5%.

(b) Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm, quel pourcentage d'entre eux dépassent 192 cm ?

Solution : La deuxième question est une probabilité conditionnelle. On demande la probabilité que $T > 192$ sachant que $T > 180$:

$$\mathbb{P}(T > 192 | T > 180) = \frac{\mathbb{P}(T > 192)}{\mathbb{P}(T > 180)} = \frac{1 - \mathbb{P}(T \leq 192)}{1 - \mathbb{P}(T \leq 180)} .$$

En utilisant le fait que $T = \sigma Z + \mu$ ceci peut se réécrire

$$\frac{1 - \mathbb{P}(T \leq 17/6)}{1 - \mathbb{P}(T \leq 5/6)} \approx \frac{1 - \mathbb{P}(T \leq 2,83)}{1 - \mathbb{P}(T \leq 0,83)} = \frac{1 - 0,9977}{1 - 0,7967} = \frac{0,0023}{0,2033} = 0,011$$

Approximativement, 1% des hommes mesurant plus de 180 cm dépassent 192 cm. Encore une fois, on utilise une table de la loi normale pour trouver la probabilité pour Z .

Solution à l'exercice 87

Énoncé

Soit Y de loi uniforme sur $(0, 5)$. Quelle est la probabilité que les zéros de l'équation

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

soient tous deux réels ?

Solution : Les zéros de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont réels si et seulement si $b^2 - 4ac \geq 0$. Ici le discriminant $b^2 - 4ac$ est

$$16Y^2 - 16(Y + 2) = 16Y^2 - 16Y - 32 .$$

Nous cherchons donc la probabilité

$$\mathbb{P}(16Y^2 - 16Y - 32 \geq 0) = \mathbb{P}(16(Y^2 - Y - 2) \geq 0) = \mathbb{P}(Y^2 - Y - 2 \geq 0)$$

pour Y une variable de loi uniforme sur $(0, 5)$. Quelles sont les valeurs de y sur $(0, 5)$ pour lesquelles $y^2 - y - 2 \geq 0$? Les zéros de $y^2 - y - 2$ sont -1 et 2 . Sur l'intervalle $(0, 5)$, $y^2 - y - 2$ est donc positif si et seulement si $2 \leq y \leq 5$. Donc

$$\mathbb{P}(Y^2 - Y - 2 \geq 0) = \mathbb{P}(Y \in (2, 5)) = \int_2^5 \frac{dy}{5} = 3/5 .$$

La probabilité que les zéros de $4x^2 + 4xY + Y + 2$ soient tous les deux réels est de $3/5$.

Solution à l'exercice 88

Énoncé

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Calculer la densité de la variable aléatoire $Y = \ln X$.

Solution : On a

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\ln X \leq y) .$$

Or, $\ln X \leq y$ si et seulement si $X \leq e^y$, car l'exponentielle est une fonction strictement croissante. Donc

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq e^y) = 1 - e^{-e^y}.$$

En prenant la dérivée, on obtient

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{d}{dy} (1 - e^{-e^y}) = e^y e^{-e^y}.$$

Solution à l'exercice 89 Énoncé

Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi uniforme discrète sur $\{1/n, 2/n, \dots, 1\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_n = k/n) = 1/n$. Montrer que pour $a, b \in [0, 1]$, $a < b$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in (a, b]) = b - a.$$

Remarque : on dira alors que la suite X_n **converge en loi** vers la loi uniforme sur $[0, 1]$. La convergence en distribution est l'une des nombreuses formes de convergence que l'on rencontre dans un cours avancé de probabilités.

Solution : Pour k un entier entre 1 et n , on a

$$\mathbb{P}\left(X_n \leq \frac{k}{n}\right) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

La fonction de répartition de X_n est donc

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On a $nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$, ce qui signifie que $\lfloor nx \rfloor / n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.

Comme

$$\mathbb{P}(X_n \in (a, b]) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a),$$

on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in (a, b]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(b) - \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor nb \rfloor}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 90 Énoncé

Pour chacune des variables aléatoires X , répondre aux questions suivantes :

- (a) Soit X de loi normale de paramètres μ, σ^2 . Trouver
- i. la densité de la variable aléatoire W , où $W = 2X$;

Solution : On a, pour $w \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W \leq w) &= \mathbb{P}(2X \leq w) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{w}{2}\right) \\ &= F_X\left(\frac{w}{2}\right), \end{aligned}$$

où $F_X(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X . Il suit que la densité de W est

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \left(F_X\left(\frac{w}{2}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w/2-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

pour tout $w \in \mathbb{R}$.

- ii. la densité de la variable aléatoire Y , où $Y = |X|$;

Solution : On a pour $y < 0$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = 0.$$

Pour $y \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(|X| \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

où $F_X(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X . Il suit que la densité de W est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= (F_X(y) - F_X(-y))' \\ &= F_X(y)' - F_X(-y)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

pour $y \geq 0$ et 0 sinon. On appelle parfois cette distribution la **loi normale repliée**.

iii. la densité de la variable aléatoire Z , où $Z = e^X$.

Solution : Clairement $e^X > 0$ pour tout X . Donc la densité de Y sera nulle sur les négatifs. Pour $Y > 0$, on procède comme suit. La fonction de répartition de Y est simplement

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln Y) = F_X(\ln y) .$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $e^X \leq y$ si et seulement si $X \leq \ln y$ pour y positif, car l'exponentielle est inversible. Pour obtenir la densité, il suffit de dériver la fonction de répartition

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\ln y) = f_X(\ln y) \frac{d}{dy} (\ln y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y) .$$

Or, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc pour $y > 0$.

$$f_{e^X}(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\ln y - \mu)^2/2\sigma^2} .$$

En somme

$$f_{e^X}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\ln y - \mu)^2/2\sigma^2} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Ce type de variable aléatoire est dite **log-normale** et apparaît régulièrement en mathématiques financières.

(b) Soit X de loi exponentielle de paramètre λ . Trouver
i. la densité de la variable aléatoire W , où $W = 2X$;

Solution : Pour $w > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W \leq w) &= \mathbb{P}(2X \leq w) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{w}{2}\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda \frac{w}{2}} . \end{aligned}$$

Il en résulte que la densité est

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \left(1 - e^{-\lambda \frac{w}{2}}\right)' \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda \frac{w}{2}} \end{aligned}$$

pour $w > 0$ et 0 sinon.

ii. la densité de la variable aléatoire Y , où $Y = |X|$;

Solution : Puisque $X > 0$, il suit que $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ veut dire que X et Y ont la même loi. La densité de Y est donc

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}.$$

iii. la densité de la variable aléatoire Z , où $Z = e^X$.

Solution : Puisque $Z > 0$ pour toute valeur de X , il en résulte que pour $z \leq 0$, on a

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = 0.$$

pour $z > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq z) &= \mathbb{P}(e^X \leq z) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \ln(z)). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que l'exponentielle est inversible et que la fonction \ln est croissante. On doit maintenant regarder les valeurs de z telles que $\ln(z)$ est dans le domaine non nul de la fonction de densité de X . En effet, X étant de loi exponentielle, elle ne prend que des valeurs positives. On doit donc avoir

$$\ln(z) > 0 \rightarrow z > 1.$$

Pour $z > 1$, la densité est donc donnée par

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= (F_X(\ln(z)))' \\ &= (1 - e^{-\lambda \ln(z)})' \\ &= (1 - e^{\ln(1/z^\lambda)})' \\ &= \left(1 - \frac{1}{z^\lambda}\right)' \\ &= \frac{\lambda}{z^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

et 0 sinon.

(c) Soit X de loi uniforme sur $[a, b]$. Trouver

i. la densité de la variable aléatoire W , où $W = 2X$;

Solution : Les valeurs possibles pour la variable W sont dans $[2a, 2b]$. Pour w dans cet intervalle, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W \leq w) &= \mathbb{P}(2X \leq w) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{w}{2}\right) \\ &= \frac{w/2 - a}{b - a}.\end{aligned}$$

La densité est donc donnée par

$$f_W(w) = \frac{1}{2} \frac{1}{b - a}$$

pour $2a \leq x \leq 2b$ et 0 sinon.

ii. la densité de la variable aléatoire Y , où $Y = |X|$;

Solution : On distingue trois cas :

- Si $0 \leq a, b$, alors $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ et a pour densité $\frac{1}{b-a}$ pour $a \leq x \leq b$ et 0 sinon.
- Si $a, b < 0$, alors Y a pour valeurs possibles les nombres entre $[-b, -a]$. Pour y dans cet intervalle, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(|X| \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-y \leq X) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq -y) \\ &= 1 - \frac{-y - a}{b - a}.\end{aligned}$$

Dans ce cas, la densité est donnée par

$$f_Y(y) = \frac{1}{b - a} = \frac{1}{(-a) - (-b)}.$$

La variable Y est donc aussi une uniforme, sur l'intervalle $[-b, -a]$.

- Si $a < 0 < b$, les valeurs possibles pour y sont les nombres dans l'intervalle $[0, \max(|a|, b)]$. On suppose que $b > |a|$. Le cas contraire se fait exactement de la même manière. En général, on a

$$\mathbb{P}(|X| \leq x) = F_X(x) - F_X(-x)$$

pour toute variable aléatoire X et nombre tout $x \geq 0$. Si $y \in [0, |a|)$, alors $F_X(-y) > 0$ et si $y \in [|a|, b]$, alors $F_X(-y) = 0$. La fonction de répartition

de Y est donc donnée par

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{y-a}{b-a} - \frac{-y-a}{b-a} & \text{si } 0 \leq y < |a| \\ \frac{y-a}{b-a} & \text{si } |a| \leq y \leq b \\ 1 & \text{si } 1 \leq y. \end{cases}$$

La densité de Y est donc donnée par la fonction

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} & \text{si } 0 \leq y < |a| \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } |a| \leq y \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

iii. la densité de la variable aléatoire Z , où $Z = e^X$.

Solution : Les valeurs possibles pour la variable aléatoire Z sont dans l'intervalle $[e^a, e^b]$. Pour z dans cet intervalle, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq z) &= \mathbb{P}(e^X \leq z) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \ln(z)) \\ &= \frac{\ln(z) - a}{b - a} \end{aligned}$$

La densité de la variable aléatoire Z est donc donnée par

$$f_Z(z) = \frac{1}{z(b-a)}$$

pour $z \in [e^a, e^b]$ et 0 sinon.

Solution à l'exercice 91 **Énoncé**

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ . Montrer que

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s),$$

pour tout $s, t \geq 0$. Cette propriété s'appelle **la perte de mémoire** de la loi exponentielle.

Solution : La propriété d'absence de mémoire peut se réécrire comme

$$\frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \mathbb{P}(X > s)$$

en utilisant la définition de probabilités conditionnelles. Une écriture équivalente est

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t) \mathbb{P}(X > s)$$

où on a aussi utilisé le fait que $\mathbb{P}(X > t + s, X > t) = \mathbb{P}(X > t + s)$. Par définition de la loi exponentielle, on a

$$\mathbb{P}(X > t + s) = e^{-\lambda(t+s)} = e^{-\lambda t} e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > t) \mathbb{P}(X > s),$$

ce qui est bien la réécriture obtenue.

Un exercice un peu plus difficile, relevant plus de l'analyse, est de montrer que la distribution exponentielle est la seule distribution continue qui possède la propriété d'absence de mémoire.

Solution à l'exercice 92 Énoncé

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, L]$. Calculer

$$\mathbb{P}\left(\min\left(\frac{X}{L-X}, \frac{L-X}{X}\right) < y\right)$$

où $y \in [0, 1]$, soit la fonction de répartition du rapport entre le plus petit et le plus grand côté.

Solution : Lorsqu'on travaille avec des minimums, il est plus facile de travailler avec une probabilité de type $\mathbb{P}(\min() > y)$, puisque si le minimum doit être plus grand qu'une quantité, alors tous les arguments du minimum doivent être plus grands que cette même quantité. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\min\left(\frac{X}{L-X}, \frac{L-X}{X}\right) < y\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left(\frac{X}{L-X}, \frac{L-X}{X}\right) > y\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X}{L-X} > y, \frac{L-X}{X} > y\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(X > \frac{Ly}{1+y}, X < \frac{L}{1+y}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Ly}{1+y} < X < \frac{L}{1+y}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1+y} - \frac{y}{1+y}\right) \\ &= \frac{2y}{1+y}. \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 93 Énoncé

Deux autobus desservent le circuit de l'aéroport au centre-ville. Le premier, disons le numéro 42, part de l'aéroport à toutes les 10 minutes en direction du centre-ville à partir de 16 heures. Le deuxième, disons le numéro 747, part toutes les 15 minutes, à partir de 16 heures 6 minutes. Un voyageur quitte l'aéroport à une heure uniformément distribuée entre 16 et 17 heures et prend le premier autobus disponible. On suppose qu'il n'y a pas de retard dans l'arrivée des autobus.

- (a) Quelle est la probabilité qu'il prenne l'autobus 42 ?

Solution : On ramène le problème à une distribution uniforme sur $[0, 60]$. On doit déterminer les sous-intervalles de temps pour lesquels le voyageur prendra l'autobus 42. S'il arrive entre 16 : 05 et 16 : 10, il prendra l'autobus 42 de 16 : 10. S'il arrive entre 16 : 19 et 16 : 20, il prendra l'autobus 42 de 16 : 20. On continue ainsi pour finalement obtenir

$$\mathbb{P}(\text{Le voyageur prend l'autobus 42}) = \mathbb{P}(\{6 < T < 20\} \cup \{21 < T < 30\} \cup \{36 < T < 50\} \cup \{51 < T < 60\})$$

où T est le temps d'arrivée du voyageur, distribué uniformément sur $[0, 60]$. Selon la distribution uniforme,

$$\mathbb{P}(\text{Le voyageur prend l'autobus 42}) = \frac{46}{60}$$

- (b) Le retard à l'atterrissage de l'avion fait en sorte que l'heure d'arrivée du voyageur est plutôt uniformément distribuée entre 16 : 25 et 17 : 25. Quelle est la probabilité qu'il prenne l'autobus 42 dans ce cas ?

Solution : On utilise la même méthode sur l'intervalle $[25, 85]$. On cherche

$$\mathbb{P}(\text{Le voyageur prend l'autobus 42}) = \mathbb{P}(\{25 < T < 30\} \cup \{36 < T < 50\} \cup \{51 < T < 60\} \cup \{60 < T < 85\})$$

La probabilité est donc, encore une fois, $46/60$.

5.3 Espérance et moments

Solution à l'exercice 94 Énoncé

On reprend la variable aléatoire de l'exercice 84. Calculer l'espérance de Y .

Solution : Nous avons que

$$\mathbb{E}(1/X^2) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (1-x) dx = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Solution à l'exercice 95 **Énoncé**

On reprend la variable aléatoire de l'exercice 80. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

Solution : Nous avons que

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-1}^1 cx^2(1-x^2) = 2c \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 1/5.$$

Solution à l'exercice 96 **Énoncé**

Soit $\alpha, \beta > 0$ deux nombres réels. On pose

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

où $\Gamma(t)$ est la fonction gamma,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

(a) Montrer que sur $(0, \infty)$, la fonction $f(x)$ est une densité de probabilité.

Solution : Il suffit de calculer l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dx &= \int_0^\infty \frac{\beta (x\beta)^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du \end{aligned}$$

où $u = \beta x$. On reconnaît au numérateur l'expression à l'intérieur de l'intégrale de la fonction gamma avec paramètre α . L'intégrale de $f(x)$ vaut ainsi 1.

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

et déduire que

$$\Gamma(t+k) = (t+k-1)(t+k-2) \cdots (t+1)t\Gamma(t)$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Solution : On montre le cas général par induction. Pour $k = 1$, on intègre par parties avec $u = x^t, dv = e^{-x} dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^t e^{-x} dx &= -e^{-x} x^t \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t x^{t-1} e^{-x} dx \\ &= t \Gamma(t). \end{aligned}$$

Supposons que $\Gamma(t + k - 1) = (t + k - 2) \cdots (t + 1) t \Gamma(t)$. Alors en intégrant par parties de la même manière que ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(t + k) &= \int_0^{\infty} x^{t+k-1} e^{-x} dx = (t + k - 1) \Gamma(t + k - 1) \\ &= (t + k - 1)(t + k - 2) \cdots (t + 1) t \Gamma(t). \end{aligned}$$

- (c) Une variable aléatoire X ayant comme densité de probabilité la fonction $f(X)$ est une variable aléatoire de loi **Gamma**. Calculer le n -ième moment de la distribution Gamma. En déduire l'espérance et la variance.

Indice : utiliser le résultat de la partie **b**.

Solution : On cherche $\mathbb{E}(X^k)$ où X est une variable aléatoire de loi Gamma. On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^k \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dx &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+k-1} e^{-\beta x} dx \\ \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha) \beta^{\alpha+k}} \int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha+k} x^{\alpha+k-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha + k)} dx & \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha) \beta^k} \end{aligned}$$

puisque

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha+k} x^{\alpha+k-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha + k)} dx = 1$$

représente l'intégrale de la densité d'une variable aléatoire de loi Gamma avec paramètre $\alpha + k, \beta$. En utilisant le résultat de la partie **b**, on obtient

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{(\alpha + k - 1)(\alpha + k - 2) \cdots (\alpha + 1)\alpha}{\beta^k}.$$

L'espérance est donc α/β et la variance

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 97 Énoncé

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Définir une variable aléatoire Y fonction de X telle que Y est de loi uniforme sur $[0, 1]$ et calculer l'espérance et la variance de X .

Solution : On veut ramener l'intervalle $[a, b]$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La façon de procéder est de translater l'extrémité gauche de l'intervalle à 0 en soustrayant a et de diviser par la largeur de l'intervalle pour ramener l'autre extrémité à 1. On pose donc

$$Y = \frac{X - a}{b - a}.$$

On vérifie que la loi de Y est bien uniforme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - a}{b - a} \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y(b - a) + a) \\ &= \frac{y(b - a) + a - a}{b - a} \\ &= y. \end{aligned}$$

Pour calculer l'espérance, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}((Y(b - a) + a)) \\ &= (b - a)\frac{1}{2} + a = \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

Pour la variance, on calcule en premier

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\left((Y(b-a) + a)^2\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(Y^2(b-a)^2 + 2a(b-a)Y + a^2\right) \\
 &= (b-a)^2\mathbb{E}(Y^2) + a(b-a) + a^2 \\
 &= \frac{(b-a)^2}{3} + a(b-a) + a^2 \\
 &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}.
 \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 98 Énoncé

Soit X une variable aléatoire non négative avec densité.

(a) Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Cette formule est la version continue de la formule présentée à l'exercice 76.

Solution : Soit f_X la densité de la variable aléatoire X . Alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx &= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f_X(y) dy dx \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^y f_X(y) dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} y f_X(y) dy \\
 &= \mathbb{E}(Y).
 \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour une variable aléatoire Y générale avec densité (pas nécessairement non négative), on a

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y > y) dy - \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y < -y) dy.$$

Solution : On a montré dans la partie a que

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y > y) dy = \int_0^{\infty} x f_Y(x) dx.$$

Pour la seconde intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{P}(Y < -y) dy &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-y} f_Y(x) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{-x} f_Y(x) dy dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 x f_Y(x) dx. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > y) dy - \int_0^\infty \mathbb{P}(Y < -y) dy &= \int_0^\infty x f_Y(x) dx + \int_{-\infty}^0 x f_Y(x) dx \\ &= \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

- (c) Utiliser la partie a pour montrer que, pour une variable aléatoire X non négative, on a

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^\infty n x^{n-1} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Solution : Par la partie a, on a

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X^n > t) dt.$$

On effectue le changement de variable $t = x^n$. On a donc $dt = n x^{n-1} dx$ et donc

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X^n > t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X^n > x^n) n x^{n-1} dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) n x^{n-1} dx$$

puisque si X est non négative, on a $\mathbb{P}(X^n > x^n) = \mathbb{P}(X > x)$.

Solution à l'exercice 99 Énoncé

En utilisant la partie a de l'exercice 98, montrer par induction que les moments d'une variable aléatoire X de loi exponentielle avec paramètre λ sont

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Solution : On a

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx,$$

donnée par la formule de la partie a de l'exercice 98. Si $n = 1$, alors

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X).$$

Supposons que la formule $\mathbb{E}(X^{n-1}) = \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}}$ soit vraie. Alors en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} nx^{n-1}e^{-\lambda x} dx &= \left. \frac{-nx^{n-1}e^{-\lambda x}}{\lambda} \right|_0^{\infty} + \frac{n}{\lambda} \int_0^{\infty} (n-1)x^{n-2}e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{n(n-1)!}{\lambda \lambda^{n-1}} \\ &= \frac{n!}{\lambda^n}. \end{aligned}$$

Solution à l'exercice 100 Énoncé

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

La variable aléatoire X est appelée une variable aléatoire de **Cauchy**.

(a) Montrer que X n'a pas d'espérance.

Solution : Il suffit d'essayer de calculer l'espérance,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \ln(|1+x^2|) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty - \infty,$$

qui est indéfinie.

(b) Calculer la densité de la variable $Y = 1/X$.

Solution : Pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 0) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{y} \leq X\right) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2} - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient

$$f_{1/X}(x) = \frac{1}{\pi x^2 (1 + (\frac{1}{x})^2)} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Le même raisonnement mène à la même densité pour $x < 0$. Ainsi, Y est aussi une variable de Cauchy.

Solution à l'exercice 101 Énoncé

Soit X une variable avec

$$\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \left(\frac{m}{x}\right)^a$$

où $x \in [m, \infty)$. On dit que X suit une loi de **Pareto** de paramètres $a > 0$ et $m > 0$. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de loi Pareto.

Solution : La densité est donnée par

$$\frac{am^a}{x^{a+1}}.$$

On cherche

$$\begin{aligned} \int_m^\infty x \frac{am^a}{x^{a+1}} dx &= \int_m^\infty \frac{am^a}{x^a} dx \\ &= am^a \int_m^\infty \frac{1}{x^a} dx. \end{aligned}$$

L'intégrale ci-dessus converge pour $a > 1$ et diverge pour $a \leq 1$. On a donc

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \infty & \text{si } a \leq 1 \\ \frac{am}{a-1} & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Solution à l'exercice 102 Énoncé

Une ambulance est stationnée le long d'une route de longueur L .

- (a) On suppose que $L < \infty$. Si un accident peut survenir à n'importe quel endroit sur la route avec loi uniforme, quel est le meilleur emplacement de l'ambulance pour minimiser l'espérance de la distance à couvrir pour aller au lieu de l'accident ?

Solution : Soit $E \in (0, L)$ l'emplacement de l'ambulance. On veut minimiser

$\mathbb{E}(|X - E|)$ où X est uniforme sur $(0, L)$. On trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X - E|) &= \int_0^E (E - x) \frac{1}{L} dx + \int_E^L (x - E) \frac{1}{L} dx \\ &= \frac{L}{2} - \left(E - \frac{E^2}{L}\right).\end{aligned}$$

Pour trouver le minimum, il suffit de dériver et d'évaluer en 0. On trouve, comme on aurait pu s'y attendre, $E = L/2$.

- (b) Imaginons maintenant que la route soit de longueur infinie. Les accidents surviennent à un endroit distribué selon une loi exponentielle avec paramètre λ . Trouver l'emplacement idéal pour l'ambulance dans ce cas.

Solution : On veut minimiser $\mathbb{E}(|X - E|)$ où X est exponentielle avec paramètre λ . On trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X - E|) &= \int_0^E (E - x) \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_E^\infty (x - E) e^{-\lambda x} dx \\ &= E - \frac{1}{\lambda} + \frac{2e^{-\lambda E}}{\lambda}.\end{aligned}$$

Pour trouver le minimum, il suffit de dériver et d'évaluer en 0. On trouve $E = \ln\left(\frac{2}{\lambda}\right)$.

6 Vecteurs aléatoires

6.1 Lois conjointes

Solution à l'exercice 103 Énoncé

Nous considérons une expérience aléatoire consistant à tirer 3 boules **sans remise** parmi 10 boules. Il y a 5 boules noires et 5 boules rouges. Les boules de même couleur sont identiques. Nous définissons deux variables aléatoires R et N :

$R =$ nombre de boules rouges tirées

$N =$ nombre de boules noires tirées

- (a) Trouver la loi marginale de R , c'est-à-dire trouver les valeurs possibles de R et la probabilité $\mathbb{P}(R = r)$ pour chacune de ces valeurs.

Solution : Nous avons que $R = 0, 1, 2, 3$. Un calcul direct donne

$$\mathbb{P}(R = r) = \frac{\binom{5}{r} \binom{5}{3-r}}{\binom{10}{3}} = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } r = 0 \\ \frac{5}{12} & \text{si } r = 1 \\ \frac{5}{12} & \text{si } r = 2 \\ \frac{1}{12} & \text{si } r = 3 \end{cases}$$

- (b) Trouver la loi conjointe des variables R et N , c'est-à-dire trouvez les valeurs possibles de la paire (R, N) et la probabilité $\mathbb{P}(R = r, N = n)$ pour chacune de ces valeurs.

Solution : On a que les valeurs possibles sont $R = r$ et $N = 3 - r$ pour $r = 0, 1, 2, 3$. Donc

$$\mathbb{P}(R = r, N = n) = \frac{\binom{5}{r} \binom{5}{3-r}}{\binom{10}{3}} = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } r = 0, n = 3 \\ \frac{5}{12} & \text{si } r = 1, n = 2 \\ \frac{5}{12} & \text{si } r = 2, n = 1 \\ \frac{1}{12} & \text{si } r = 3, n = 0 \end{cases}$$

Solution à l'exercice 104 Énoncé

On considère deux temps d'attente aléatoires X et Y de loi exponentielle avec paramètre 1. On suppose que X et Y sont indépendants. Nous cherchons à comprendre le temps

d'attente cumulatif ainsi que la proportion du temps d'attente cumulatif provenant de X .
à cet effet, nous définissons les variables aléatoires suivantes

$$T = X + Y \quad (\text{temps d'attente cumulatif})$$

$$P = \frac{X}{X + Y} \quad (\text{proportion de } T \text{ due à } X)$$

À partir de cette information, répondre aux questions suivantes :

- (a) Quelles sont les valeurs prises par T et P ?

Solution : Nous avons que les valeurs prises par T sont dans $(0, \infty)$ et $P \in [0, 1]$.

- (b) Trouver la loi marginale de T , c'est-à-dire trouver la fonction de répartition, puis la densité marginale.

(Attention aux bornes ! Un dessin peut aider...)

Solution : La loi marginale de $X + Y$ est donnée par

$$\mathbb{P}(X+Y \leq z) = \iint_{\{(x,y):x+y \leq z\}} e^{-x}e^{-y}dxdy = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-x}e^{-y}dxdy = 1 - e^{-z} - ze^{-z}.$$

La densité de T est donc $f_T(t) = te^{-t}$.

- (c) Trouver la loi marginale de P , c'est-à-dire trouver la fonction de répartition, puis la densité marginale.

(Attention aux bornes ! Un dessin peut aider...)

Solution : Nous avons que si $\frac{x}{x+y} \leq p$, alors $y \leq \frac{1-p}{p}x$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X/(X + Y) \leq p) = \int_0^\infty \int_0^{(1-p)x/p} e^{-x}e^{-y}dxdy = p.$$

Par conséquent, P est de loi uniforme sur $[0, 1]$!

- (d) Calculer la fonction de répartition conjointe de (T, P) .

Quelle est la densité conjointe ? Que peut-on conclure au sujet de la dépendance des variables aléatoires T et P ?

Solution : Pour la loi conjointe, nous considérons la fonction de répartition pour $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq p \leq 1$

$$\mathbb{P}(P \leq p, T \leq t) = \iint_{x+y \leq t, x/(x+y) \leq p} e^{-x}e^{-y}dxdy$$

Posons le changement de variable $q = x + y$ et $s = x/x + y$. Donc $x = sq$ et $y = q - sq$. Par conséquent

$$dx dy = \left| \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial q} \right| ds dq = q ds dq$$

On en conclut que

$$\mathbb{P}(P \leq p, T \leq t) = \int_0^p \int_0^t e^{-q} q ds dq$$

et la densité conjointe est simplement $f_{T,P}(t,p) = te^{-t} dt dp$. En particulier, les variables sont indépendantes.

Solution à l'exercice 105

Énoncé

La densité conjointe de deux variables aléatoires X et Y est

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Considérons les variables aléatoires $Z = XY$ et $V = X/Y$. Quelles sont les valeurs possibles prises par Z et par V ?

Solution : La v.a. Z prend des valeurs dans $[1, \infty)$ et V , de $(0, \infty)$.

- (b) On veut calculer la fonction de répartition de $Z = XY$: $\mathbb{P}(XY \leq z)$. Faire un schéma dans le plan (x, y) indiquant la région du plan correspondant à

$$\{(x, y) : xy \leq z\} \cap \{x \geq 1\} \cap \{y \geq 1\}.$$

Solution : La région au centre !

- (c) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\mathbb{P}(XY \leq z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{z} - \frac{\ln z}{z} & \text{si } z \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution : Nous avons que y va de 1 à z/x et x de 1 à z . Nous avons donc que la fonction de répartition

$$\mathbb{P}(XY \leq z) = \int_1^z \left(\int_1^{z/x} \frac{dy}{y^2} \right) \frac{dx}{x^2}.$$

En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(XY \leq z) &= \int_1^z \left(1 - \frac{x}{z} \right) \frac{dx}{x^2} \\ &= \left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{z} \ln x \right) \Big|_1^z \\ &= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \ln z. \end{aligned}$$

(d) En déduire la densité de la variable $Z = XY$.

Solution : En prenant la dérivée, on obtient

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2} \ln z & \text{si } z \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(e) Est-ce que l'espérance de Z est finie ? Justifier.

Solution : L'espérance de Z n'est pas finie, car

$$\int_e^\infty z \frac{1}{z^2} \ln z dz > \int_e^\infty \frac{1}{z} dz = \infty$$

Solution à l'exercice 106 **Énoncé**

Nous choisissons un point aléatoire (X, Y) dans la région $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ avec la densité de probabilité

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Trouver la densité marginale de X et la densité marginale de Y . Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Solution : Les densités marginales sont e^{-x} et e^{-y} . Les v.a. sont évidemment indépendantes.

- (b) Considérons la variable aléatoire $Z = X + Y$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Z .

Solution : Nous avons

$$\mathbb{P}(X + Y \leq z) = \int_0^z dx e^{-x} \int_0^{z-x} dy e^{-y} = 1 - e^{-z} - ze^{-z}.$$

La densité est donc

$$ze^{-z}$$

pour $z > 0$.

- (c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ à l'aide de la densité et de la linéarité de l'espérance.

Solution :

Nous avons

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{\infty} z^2 e^{-z} dz = \Gamma(3) = 2$$

ce qui est bien $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

6.2 Espérance et moments

Solution à l'exercice 107 Énoncé

Calculer la covariance entre R et N dans l'exercice 103.

Solution : On a que $\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(N) = \frac{5}{12} + \frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{3}{2}$. De plus

$$\mathbb{E}(RN) = \frac{10}{12} + \frac{10}{12} = \frac{5}{3}.$$

On en conclut que $\text{Cov}(R, N) = \frac{5}{3} - \frac{9}{4} = -\frac{7}{12}$.

6.3 Indépendance

Solution à l'exercice 108 Énoncé

Soit 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 3 boules **sans remise**. On définit les

variables aléatoires (X_1, X_2, X_3) où $X_i =$ numéro de la i -ème boule tirée pour $i = 1, 2, 3$. Est-ce que les variables X_i sont indépendantes ? Justifier en une phrase. Est-ce que les variables X_i ont la même loi marginale ? Justifier en une phrase. Calculer l'espérance de la somme des numéros, c'est-à-dire $X_1 + X_2 + X_3$.

Solution : Les v.a. ne sont pas indépendantes, car si $X_1 = 1$ alors $X_2 \neq 1$ par exemple. Toutefois la linéarité de l'espérance s'applique et nous avons

$$\mathbb{E}(X) = 3\mathbb{E}(X_1) = 3 \sum_{n=1}^{10} \frac{x}{10} = \frac{3}{10} 11 \times 5 = \frac{33}{2}.$$

La première égalité vient du fait que les marginales de X_1, X_2 et X_3 sont les mêmes. Nous avons les mêmes chances de tirer une boule donnée au troisième tirage qu'au premier par exemple, si nous n'avons pas d'information sur les autres tirages.

Solution à l'exercice 109 Énoncé

On choisit un point aléatoire (X, Y) dans la région $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ avec la densité de probabilité

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Trouver la densité marginale de X et la densité marginale de Y . Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Solution : On a

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)} dy = xe^{-x} \left(\frac{-1}{x} e^{-xy} \right) \Big|_0^{\infty} = e^{-x}$$

et

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)} dx$$

On intègre par partie avec $u = x$ et $dv = e^{-x(y+1)}$ (donc $v = \frac{-1}{y+1} e^{-x(y+1)}$) pour obtenir

$$f_Y(y) = \frac{-x}{y+1} e^{-x(y+1)} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{y+1} e^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{(y+1)^2}$$

Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes, car la densité conjointe n'est pas le produit des marginales.

- (b) On considère la variable aléatoire $Z = XY$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Z . Quelle est sa loi ?

Solution : Z prend valeur sur $(0, \infty)$. En y allant de manière directe

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY \leq z) &= \int_0^\infty \left(\int_0^{z/x} x e^{-x(y+1)} dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x} (1 - e^{-z/x}) dx \\ &= 1 - e^{-z}.\end{aligned}$$

La loi de Z est donc exponentielle de paramètre 1 et sa densité est e^{-z} sur $z > 0$.

(c) Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

Solution : Nous avons $\mathbb{E}(XY) = 1$. De plus, $\mathbb{E}(X) = 1$. Par contre

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \frac{y}{(1+y)^2} dy = \infty$$

Donc $\text{cov}(X, Y) = -\infty!$

6.4 Lois conditionnelles

Solution à l'exercice 110 Énoncé

(a) Trouver la loi conjointe de (N, Λ) , c'est-à-dire $\mathbb{P}(N = n, \Lambda = \lambda)$ pour toutes les valeurs possibles de N et Λ .

Solution : Nous avons que

$$\mathbb{P}(N = n, \Lambda = 1) = \frac{1}{2} \frac{e^{-1}}{n!} \quad \mathbb{P}(N = n, \Lambda = 2) = \frac{1}{2} \frac{2^n e^{-2}}{n!}$$

(b) Trouver la loi marginale de N , c'est-à-dire $\mathbb{P}(N = n)$ pour toutes les valeurs possibles de N .

Solution : La loi marginale est simplement obtenue en sommant sur λ , donc

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2} \frac{e^{-1}}{n!} + \frac{1}{2} \frac{2^n e^{-2}}{n!}$$

(c) Calculer $\mathbb{P}(\Lambda = \lambda | N = 0)$ pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. En déduire l'espérance conditionnelle de Λ sachant que $N = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(\Lambda | N = 0)$.

Solution : Nous avons par définition que

$$\mathbb{E}(\Lambda|N=0) = 1\mathbb{P}(\Lambda=1|N=0) + 2\mathbb{P}(\Lambda=2|N=0).$$

Or

$$\mathbb{P}(\Lambda=1|N=0) = \frac{\mathbb{P}(N=0, \Lambda=1)}{\mathbb{P}(N=0)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-1}}{\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2}} = \frac{1}{e^{-1} + 1}$$

$$\mathbb{P}(\Lambda=2|N=0) = \frac{1}{e+1}$$

Donc

$$\mathbb{E}(\Lambda|N=0) = \frac{1}{e^{-1} + 1} + \frac{2}{e+1} = \frac{e+2}{e+1}$$

- (d) Calculer la fonction génératrice des moments de N , $\phi_N(t) = \mathbb{E}(e^{tN})$.

Solution : Nous avons que $\mathbb{E}(\exp tN) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}\mathbb{P}(N=n)$. Par l'expression trouvée en b,

$$\mathbb{E}(\exp tN) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{e^{-1}}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{2^n e^{-2}}{n!}$$

Si on veut, on peut écrire l'expression comme la somme de deux f.g.m. de variables de Poisson(1) et Poisson(2)

$$\mathbb{E}(\exp tN) = \frac{1}{2}e^{(e^t-1)} + \frac{1}{2}e^{2(e^t-1)}.$$

- (e) Montrer que N n'est pas une variable aléatoire de Poisson.

Solution : Si N est une variable de Poisson, alors il existe λ tel que

$$e^{\lambda(e^t-1)} = \frac{1}{2}e^{(e^t-1)} + \frac{1}{2}e^{2(e^t-1)}$$

Si on écrit $\alpha = e^t - 1$, cette relation devient

$$e^{\lambda\alpha} = \frac{1}{2}e^{\alpha} + \frac{1}{2}e^{2\alpha}$$

qui doit être vérifiée pour tout $\alpha > 0$. Cette relation est équivalente à

$$2e^{(\lambda-1)\alpha} = 1 + e^{\alpha}$$

Cette égalité ne peut être vraie pour tout α . Prenez deux dérivées par exemple.

Solution à l'exercice 111 Énoncé

La densité de probabilité d'un vecteur aléatoire (X, Y) est donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{3} xy & \text{si } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Faire un schéma de la région du plan (x, y) où la densité est non-nulle. Est-ce que X et Y sont indépendantes? Justifier brièvement.

Solution : C'est une coquille dans le 1er quadrant! X, Y sont dépendantes!

- (b) Pour $0 < y < 1$, montrer que la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est $2x$.
Indice : Utiliser le dessin en a)!

Solution : Pour la densité conditionnelle, dans le cas $y < 1$, nous avons que

$$f_Y(y) = \frac{8}{3} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} xy dx = \frac{4y}{3} (2 - y^2 - 1 + y^2) = \frac{4y}{3} .$$

Donc pour $0 < y < 1$,

$$f_{X|Y}(x|y) = 2x .$$

- (c) Nous voulons maintenant décrire le point en coordonnées polaires (R, Θ) , où

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

et

$$\tan \Theta = \frac{Y}{X} .$$

Trouver une expression pour la densité $f_{(R, \Theta)}(r, \theta)$ en coordonnées polaires du vecteur (R, Θ) . Est-ce que R et Θ sont indépendantes? Justifier brièvement.

Solution : Nous avons $X = R \cos \Theta$ et $Y = R \sin \Theta$. De plus le jacobien de la transformation est $dx dy = r dr d\theta$. Donc

$$f(r, \theta) = \frac{8}{3} r^3 \sin \theta \cos \theta .$$

Ici $1 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$. En particulier, R et Θ sont indépendantes.

- (d) Calculer la distance moyenne du vecteur (X, Y) à l'origine.

Solution : Nous avons que la distance moyenne à l'origine est

$$\mathbb{E}(R) = \frac{8}{3} \int_1^{\sqrt{2}} r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{8}{3} \frac{1}{5} (2^{5/2} - 1) \frac{1}{2} = \frac{4}{15} (2^{5/2} - 1)$$

Solution à l'exercice 112 Énoncé

La densité de probabilité d'un vecteur aléatoire (X, Y) est donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{15} |xy| & \text{si } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Faire un schéma de la région du plan (x, y) où la densité est non-nulle. Est-ce que X et Y sont indépendantes? Justifiez brièvement.

Solution : C'est une coquille. X, Y sont dépendantes!

- (b) Pour $y > 1$, Trouver la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$. *Indice : Utiliser le dessin en a)!*

Solution : Pour la densité conditionnelle,

$$f_Y(y) = \frac{8}{30} 4(4 - y^2) .$$

Donc $y > 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2x}{4 - y^2} .$$

- (c) Nous voulons maintenant décrire le point en coordonnées polaires (R, Θ) , où $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\tan \Theta = \frac{Y}{X}$.
Trouver une expression pour la densité $f_{(R, \Theta)}(r, \theta)$ en coordonnées polaires du vecteur (R, Θ) . Est-ce que R et Θ sont indépendantes? Justifier brièvement.

Solution : Nous avons $X = R \cos \Theta$ et $Y = R \sin \Theta$. De plus le jacobien de la transformation est $dxdy = r dr d\theta$. Donc

$$f(r, \theta) = \frac{8}{3} r^3 \sin \theta \cos \theta .$$

Ici $1 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$. En particulier, R et Θ sont indépendantes.

- (d) Calculer la distance au carré moyenne du vecteur (X, Y) à l'origine.

Solution : nous avons que la distance moyenne au carré à l'origine est

$$\mathbb{E}(R^2) = \frac{8}{15} \int_1^{\sqrt{2}} r^5 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{8}{15} \frac{1}{6} (2^6 - 1) \frac{1}{2} = \frac{8}{15} \frac{63}{6}$$

Solution à l'exercice 113 **Énoncé**

La densité d'un vecteur aléatoire (X, Y) est

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Déterminer les densités marginales de X et Y .

Solution : Nous avons pour $0 < x < 1$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x + y) dy = x + \frac{1}{2}.$$

Pour Y , nous obtenons le même résultat $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$.

(b) Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ? Justifier.

Solution : Les variables ne sont pas indépendantes, car le produit de la densité n'est pas la densité jointe.

(c) Calculer $\mathbb{P}(X + Y < 1)$.

Solution :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y < 1) &= \int \int_{\{(x,y):x+y<1\}} (x + y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \int_0^1 x - x^2 + \frac{1 - 2x + x^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (d) Trouver la densité conditionnelle de X sachant que $Y = y$, $0 < y < 1$. Calculer $\mathbb{P}(X < 1/2|Y = y)$.

Solution : On a par définition que $f_{X|Y}(x, y) = f(x, y)/f_Y(y)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 1/2|Y = y) &= \int_0^{1/2} \frac{x+y}{y+1/2} dx . \\ &= \frac{x^2/2}{y+1/2} \Big|_0^{1/2} + \frac{yx}{y+1/2} \Big|_0^{1/2} = \frac{y+1/8}{y+1/4} .\end{aligned}$$

7 Propriétés de l'espérance

7.1 Espérance conditionnelle

Solution à l'exercice 114 Énoncé

Un immeuble à bureaux compte N étages au-dessus du rez-de-chaussée. On suppose qu'au rez-de-chaussée M personnes entrent dans l'ascenseur, avec M une variable aléatoire de Poisson avec moyenne λ . Chaque personne descend à l'un des N étages de façon indépendante des autres et avec probabilité $1/N$. Calculer le nombre d'arrêts moyen que fera l'ascenseur.

Solution : Soit A le nombre d'arrêts de l'ascenseur. Alors

$$\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(A | M)).$$

On calcule $\mathbb{E}(A | M = k)$. Pour cela, on pose A_i la variable aléatoire valant 1 si l'ascenseur effectue un arrêt à l'étage i et 0 sinon. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A | M = k) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N A_i | M = k\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(A_i | M = k) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right) \\ &= N \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right). \end{aligned}$$

L'espérance de A est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(A | M = k) \mathbb{P}(M = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(N - \left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right) e^{-\lambda} \lambda^k / k! \\ &= N - N e^{-\lambda/N}. \end{aligned}$$

7.2 Fonctions génératrices des moments

Solution à l'exercice 115 Énoncé

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous considérons pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire discrète Y_n avec loi

$$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Calculer $\mathbb{E}(e^{tU})$ pour $t \in \mathbb{R}$ fixé.

Solution : Nous avons

$$\int_0^1 e^{tu} du = \frac{1}{t}(e^t - 1).$$

- (b) Calculer $\mathbb{E}(e^{tY_n})$ pour $t \in \mathbb{R}$ fixé.

Solution : Pour Y_n , nous trouvons

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{t \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \frac{1 - e^t}{1 - e^{\frac{t}{n}}}.$$

- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{tY_n}) = \mathbb{E}(e^{tU})$. Que peut-on en déduire (à l'aide d'un théorème présenté en classe)? Est-ce que le résultat correspond à l'intuition?

Solution : Il reste à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{t/n}) = -t.$$

On peut utiliser L'Hospital pour conclure que $\varphi_{Y_n}(t) \rightarrow \varphi_U(t)$. Comme la f.g.m. détermine la loi, on conclut que Y_n converge en loi vers une variable de loi uniforme, ce qui correspond à l'intuition, car Y_n choisit n points uniformément distribués sur $[0, 1]$.

Solution à l'exercice 116 Énoncé

Calculer la fonction génératrice des moments ainsi que les 3 premiers moments de la variable aléatoire X , où X suit une loi :

- (a) Bernoulli de paramètre p ;

Solution : Comme X prend la valeur 1 avec probabilité p et la valeur 0 avec probabilité $1 - p$, on a

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = pe^t + 1 - p.$$

Les trois premiers moments sont tous égaux à p .

(b) binomiale de paramètres n, p ;

Solution : Soit $X_i, 1 \leq i \leq n$ une collection de variables aléatoires i.i.d. Bernoulli de paramètre p . Puisque $X = \sum_{i=1}^n X_i$ et qu'en général $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ ($M_X(t)$ est la f.g.m. de la variable X) pour des variables X, Y indépendantes, on a

$$M_X(t) = M_{X_1}(t)^n = (pe^t + 1 - p)^n.$$

Les trois premiers moments sont respectivement $np, np(1 - p + np), np(n^2p^2 + 3np(1 - p) + 2p^2 - 3p)$.

(c) géométrique de paramètre p ;

Solution : La variable aléatoire e^{tX} prendra la valeur e^{tk} avec probabilité $p(1 - p)^{k-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p(1 - p)^{k-1} \\ &= pe^t \sum_{k=0}^{\infty} (e^t(1 - p))^{k-1} \\ &= \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}. \end{aligned}$$

On a utilisé la formule de la série géométrique. Toutefois, celle-ci n'est valide que si $e^t(1 - p) < 1$ et donc $t < -\ln(1 - p)$ pour que la série converge. Les trois premiers moments sont respectivement $1/p, (2 - p)/p^2, (p^2 - 6p + 6)/p^3$.

(d) Poisson de paramètre λ .

Solution : On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{tk} \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Les trois premiers moments sont respectivement $\lambda, \lambda + \lambda^2, \lambda + 3\lambda + \lambda^3$.

(e) uniforme sur l'intervalle (a, b) ;

Solution : On a

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.$$

Les trois premiers moments sont respectivement $(a+b)/2, (a^2+ab+b^2)/3, (a^3+a^2b+ab^2+b^3)/4$.

(f) normale de paramètres μ, σ^2 ;

Solution : On a, en posant $x = z\sigma + \mu$ dans l'intégrale ci-dessous

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

$$= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\sigma t} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dz$$

$$= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Les trois premiers moments sont respectivement $\mu, \mu^2 + \sigma^2, \mu^3 + 3\mu\sigma^2$.

(g) exponentielle de paramètre λ ;

Solution : On a

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{x(t-\lambda)} dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

où $t < \lambda$ pour que l'intégrale converge. Les trois premiers moments sont respectivement $1/\lambda, 2/\lambda^2, 6/\lambda^3$.

(h) Cauchy standard.

Solution : La f.g.m. n'existe pas, car la distribution n'a pas de moments !

Solution à l'exercice 117 Énoncé

Soit X une variable aléatoire de loi $\text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Si X' est indépendant de X et de loi $\text{Poisson}(\lambda')$, calculer $\mathbb{E}(e^{t(X+X')})$.

Solution : $Ee^{tX+tX'} = \exp(\lambda(e^t - 1))\exp(\lambda'(e^t - 1))$

(b) En utilisant un résultat vu en classe, que peut-on en déduire au sujet de la loi de $X + X'$?

Solution : $X + X'$ est de loi $\text{Poisson}(\lambda + \lambda')$ par les fonctions génératrices.

7.3 Inégalités

Solution à l'exercice 118 Énoncé

Soit X une variable aléatoire non négative. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) \leq (\mathbb{E}(X^2))^{1/2} \leq (\mathbb{E}(X^3))^{1/3} \leq \dots$$

Solution : Soit $f(x)$ une fonction convexe. Alors par l'inégalité de Jensen, on a

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Soit $f(x) = x^{n/(n-1)}$. Cette fonction est convexe. On a donc, pour toute fonction Y non négative.

$$\mathbb{E}(Y)^{n/(n-1)} \leq \mathbb{E}(Y^{n/(n-1)}).$$

On prend $Y = X^{n-1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^{n-1})^{n/(n-1)} &\leq \mathbb{E}(X^n) \\ \mathbb{E}(X^{n-1})^{1/(n-1)} &\leq \mathbb{E}(X^n)^{1/n}. \end{aligned}$$

8 Théorèmes limites

8.1 Loïs des grands nombres

Solution à l'exercice 119 Énoncé

Soit X_1, X_2, \dots une collection de variables aléatoires i.i.d. avec moyenne $\mu < \infty$. Soit S_n la somme partielle des X_i . Montrer que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n/n - \mu| > \epsilon) = 0.$$

Remarque : ceci est la loi faible des grands nombres, sans l'hypothèse additionnelle de la variance des X_i finie. Utiliser les fonctions génératrices des moments.

Solution : Soit $M(t)$ la fonction génératrice de X_1 . Celle de X_1/n est donc $M(t/n)$. Puisque les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, on a

$$M_{S_n/n}(t) = M(t/n)^n.$$

On utilise le développement de Taylor d'ordre 1 pour écrire

$$M(t/n) = 1 + \mu t/n + r(t^2/n^2)$$

où $r(t^2/n^2)$ est une fonction telle que $nr(t^2/n^2) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En prenant la limite quand $n \rightarrow \infty$ du logarithme de $M_{S_n/n}(t)$, on a

$$\begin{aligned} \ln(M_{S_n/n}(t)) &= n \ln(M(t/n)) \\ &= n \ln(1 + \mu t/n + r(t^2/n^2)) \end{aligned}$$

On peut calculer cette limite en utilisant la règle de l'Hospital pour finalement obtenir que $M_{S_n/n}(t) \rightarrow e^{\mu t}$. Comme la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire (constante) μ vaut $e^{\mu t}$ et que la f.g.m. caractérise la distribution, on conclut que S_n/n converge vers μ .

8.2 Approximation poissonienne

Solution à l'exercice 120 Énoncé

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli avec paramètre $p(n)$ où $p(n)$ est telle que $np(n)$ converge vers $\lambda > 0$. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

où Y est une variable aléatoire de loi Poisson avec paramètre λ . Utiliser les f.g.m.

Solution : Ceci est l'approximation poissonnienne à la loi binomiale. La fonction génératrice de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est

$$\begin{aligned} M_n(t) &= (p(n)e^t + (1-p))^n \\ &= (1 + p(n)(e^t - 1))^n \\ &\approx (1 + \lambda/n(e^t - 1))^n. \end{aligned}$$

En prenant la limite et en utilisant le fait que $(1 + x/n)^n \rightarrow e^x$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

qui est la f.g.m d'une loi de poisson de paramètre λ .

8.3 Théorème central limite

Solution à l'exercice 121

Énoncé

Au casino, la roulette est une roue qui comprend 18 cases rouges, 18 cases noires et deux cases vertes marquées respectivement 0 et 00. Un joueur mise 1 \$ par tour sur « noire ». Si la bille de la roulette tombe dans une case noire, il gagne 1 \$ et sinon il perd sa mise de 1 \$. Approximer la probabilité que le joueur soit plus riche qu'au départ après 361 tours de roulette.

Solution : Soit X_i la variable aléatoire valant 1 avec probabilité $18/38$ et -1 avec probabilité $20/38$. On a $\mathbb{E}(X_i) = -1/19$ et $Var[X_i] = 1 - (-1/19)^2 = 360/361$. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Le théorème central limite dit que

$$\mathbb{P}(S_n \geq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Avec $n = 361$, $\mu = -1/19$ et $\sigma = \sqrt{360/361} \approx 1$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq 0) \approx \mathbb{P}(Z \geq 1) \approx 0,1587.$$

Après 361 tours de roulette, on est donc moins riche en moyenne de 19 \$ avec une probabilité de près de 16 % d'être plus riche.

Conception du contenu

Jean-Sébastien Turcotte

Cégep Gérard-Godin
js.turcotte@cgodin.qc.ca

Révision du contenu

Louis-Pierre Arguin

Louis-Pierre.Arguin@baruch.cuny.edu

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en \LaTeX

Nicolas Beauchemin

Jean-Sébastien Turcotte

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca
js.turcotte@cgodin.qc.ca

Direction et production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



**CÉGEP RÉGIONAL
de LANAUDIÈRE
à Terrebonne**

**Université 
de Montréal**

Ressource mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca