

# Loi exponentielle

**Jean-François Renaud**

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)  
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

# Introduction

- La loi exponentielle est une loi de probabilités continue très importante.
- Elle possède des liens étroits avec d'autres lois de probabilités et plusieurs modèles probabilistes.
- Elle est souvent utilisée pour modéliser la *durée de vie* de certains phénomènes ou le temps d'attente entre des événements:
  - la durée de vie d'un appareil électrique;
  - le temps d'attente entre l'arrivée de clients à un guichet automatique;
  - le temps entre des appels téléphoniques;
  - etc.

## Définition à partir de la densité

### Loi exponentielle

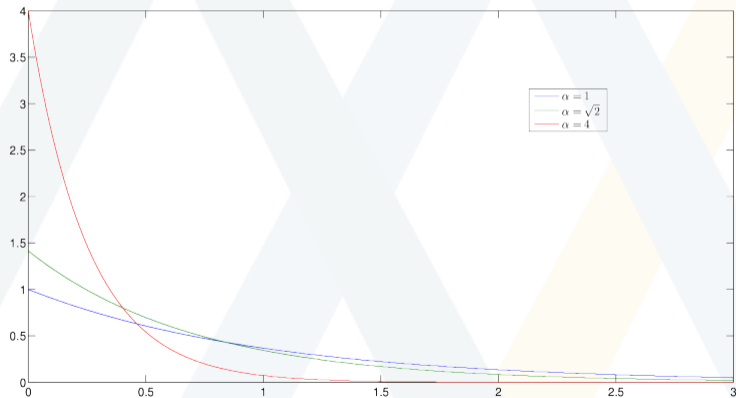
La loi exponentielle de paramètre  $\alpha > 0$  est une loi de probabilités (absolument) continue, dont la fonction de densité est donnée par

$$x \mapsto \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, le paramètre  $\alpha$  est appelé *taux d'arrivée*.

## Graphes de la fonction de densité

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x \geq 0$$



## Variables aléatoires de loi exponentielle

Si une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha > 0$ , on écrit

$$X \sim \exp(\alpha),$$

ou

$$X \sim \mathcal{E}(\alpha).$$

Clairement, dans ce cas,

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

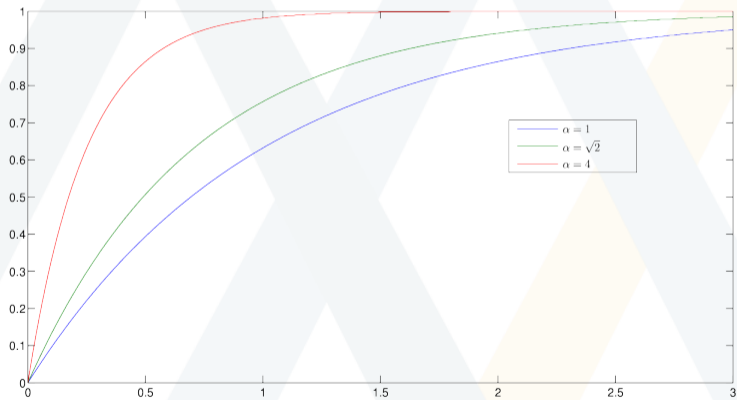
On peut donc affirmer que si  $X$  suit une loi exponentielle, alors  $X \geq 0$ .

# Fonction de répartition

Si  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha > 0$ , alors

# Graphes de la fonction de répartition

$$F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}, x \geq 0$$



# Espérance et variance

Si  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha > 0$ , alors

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\alpha^2}$
- $\text{Var}(X) = \frac{1}{\alpha^2}$

## Autre représentation de la loi

On aurait aussi pu définir la loi exponentielle de la façon suivante:

### Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\beta > 0$  si

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Dans ce cas,  $\beta$  est appelé le paramètre d'échelle de la loi exponentielle.

Ainsi, le paramètre  $\beta$  est aussi la moyenne de la loi et la fonction de répartition est

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/\beta}, \quad \text{lorsque } x \geq 0.$$

# Résumé

- Définition de la loi exponentielle
- Identification de la fonction de répartition
- Calcul de l'espérance et de la variance
- Interprétation du paramètre

Conception du contenu

**Jean-François Renaud**

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

**Clarence Simard**

Révision du contenu

**Samuel Bernard**

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet  
**Samuel Bernard**  
**Bruno Poellhuber**

Postproduction  
**Gabriel Prince**

Musique  
**Sébastien Belleudy**  
[sebe.bandcamp.com](http://sebe.bandcamp.com)

Conception graphique

**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX

**Nicolas Beauchemin**

[nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca](mailto:nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca)

Production

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**



**Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence**

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

**Mathema-TIC.ca**