

Boules et urnes

Nombre de solutions entières positives à une équation

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Dans cette capsule vidéo, nous allons étudier un problème de dénombrement classique, celui de répartir m boules dans n urnes.

Si les boules sont distinctes et les urnes sont distinctes, alors par le principe fondamental du dénombrement, il y a n^m possibilités.

Ce n'est pas l'ordre d'arrivée des boules dans les urnes qui est important, mais de savoir quelle boule est dans quelle urne.

Mais qu'arrive-t-il si les boules ne sont plus distinguables?

Dans ce cas, c'est le nombre de boules dans chaque urne qui devient important.

Pour cette capsule, je vais supposer que vous savez calculer le nombre de combinaisons d'objets distincts.

Boules indistinguables et urnes distinctes

On veut répartir m boules indistinguables dans n urnes distinctes (numérotées).

On peut représenter par x_i le nombre de boules dans l'urne numérotée i , pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$.

Comme il y a m boules à répartir au total, il faut nécessairement que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m,$$

où $x_i \geq 0$, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$.

Notre problème est donc équivalent au problème de trouver le nombre de solutions entières positives à cette équation.

Solutions entières strictement positives

Nous allons tout d'abord nous attaquer à un problème plus simple: répartir m boules indistinguables dans n urnes numérotées, tout en s'assurant qu'il y ait au moins 1 boule dans chaque urne.

Dans ce cas, il faut nécessairement que $m \geq n$.

Ce nouveau problème est équivalent au suivant: trouver le nombre de solutions entières à

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,$$

où $x_i \geq 1$, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$.

Boules et urnes - un exemple

Supposons que nous ayons $m = 5$ boules à répartir dans $n = 2$ urnes.

Représentons graphiquement nos $m = 5$ boules de la façon suivante:



Nous allons représenter le fait de distribuer $x_1 = 3$ boules dans l'urne #1 et $x_2 = 2$ boules dans l'urne #2 par



Il y a donc autant de façons de répartir nos $m = 5$ boules dans les $n = 2$ urnes, tout en s'assurant qu'il y ait au moins 1 boule dans chaque urne, qu'il y a de façons de placer le trait vertical entre les boules:



Boules et urnes - un autre exemple

Supposons maintenant que nous ayons $m = 5$ boules à répartir dans $n = 3$ urnes.

Nous allons maintenant représenter le fait de distribuer $x_1 = 2$ boules dans l'urne #1, $x_2 = 2$ boules dans l'urne #2 et $x_3 = 1$ boule dans l'urne #3 par



Nous devons donc placer $n - 1 = 2$ traits verticaux parmi $m - 1 = 4$ positions possibles.

Il y a donc le même nombre de possibilités qu'il y a de combinaisons de $n - 1 = 2$ objets pris parmi $m - 1 = 4$ distincts.

Résultat général

Afin de connaître le nombre de façons de répartir m boules indistinguables dans n urnes numérotées, tout en s'assurant qu'il y ait au moins 1 boule dans chaque urne,



il suffit de choisir $n - 1$ espaces parmi les $m - 1$ disponibles.

Il y a donc le même nombre de possibilités qu'il y a de combinaisons de $n - 1$ objets pris parmi $m - 1$ distincts.

Résultat général

Solutions entières strictement positives

Le nombre de solutions entières à

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,$$

où $x_i \geq 1$, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, est

$$\binom{m-1}{n-1}.$$

C'est aussi le nombre de façons de répartir m boules indistinguables dans n urnes distinctes, tout en s'assurant qu'il y ait au moins 1 boule dans chaque urne.

Solutions entières positives

Nous cherchons maintenant le nombre de solutions entières positives, c'est-à-dire telles que $x_i \geq 0$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, à

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m.$$

On se ramène facilement à la situation précédente en posant $y_i = x_i + 1$:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_n + 1) = m + n$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = m + n,$$

où $y_i = x_i + 1 \geq 1$, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$.

On sait qu'il y a $\binom{m+n-1}{n-1}$ solutions possibles à cette équation.

Résultat général

Solutions entières positives

Le nombre de solutions entières à

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,$$

où $x_i \geq 0$, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, est

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m}.$$

C'est aussi le nombre de façons de répartir m boules indistinguables dans n urnes distinctes, en permettant qu'il y ait des urnes vides.

Résumé

- Nombre de solutions entières strictement positives à $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$
- Nombre de solutions entières positives à $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca